Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 29, 41, 53 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(3) = 4$ и $P(4) = 3$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+5)^{139}+(x+5)^{138}(x+16)+(x+5)^{137}(x+16)^2+\cdots+(x+16)^{139} = 0$

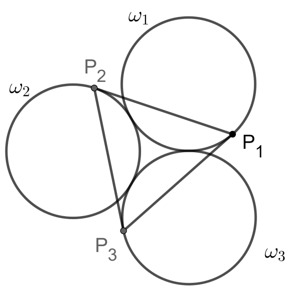
4. **(7 баллов)** Группу с 5 юношами и 5 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 17-м месте, после 40 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AB = 18$, $CD = \sqrt{192}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 5. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 28 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a + b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 60$, $AD = 36$, $AA_1 = 40$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$5|x-4a| + |x-a^2| + 4x - 3a = 0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 2.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 59, 61, 67 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(4) = 5$ и $P(5) = 4$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+6)^{159}+(x+6)^{158}(x+23)+(x+6)^{157}(x+23)^2+\cdots+(x+23)^{159} = 0$

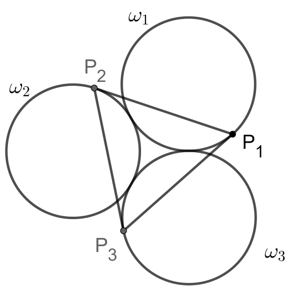
4. **(7 баллов)** Группу с 6 юношами и 6 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 13-м месте, после 30 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AB = 24$, $CD = \sqrt{171}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 17. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 20 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a + b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 60$, $AD = 30$, $AA_1 = 15$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$7|x-4a| + |x-a^2| + 6x - 2a = 0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 3.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 43, 53, 61 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(5) = 6$ и $P(6) = 5$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+7)^{179}+(x+7)^{178}(x+20)+(x+7)^{177}(x+20)^2+\cdots+(x+20)^{179} = 0$

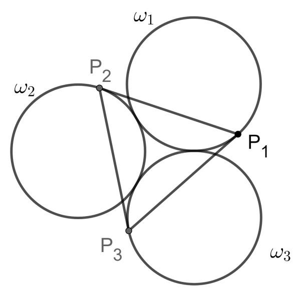
4. **(7 баллов)** Группу с 7 юношами и 7 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 17-м месте, после 23 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, $AB = 30$, $CD = \sqrt{132}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 19. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 12 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a + b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 54$, $AD = 90$, $AA_1 = 60$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$6|x - 4a| + |x - a^2| + 5x - 4a = 0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 4.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 47, 59, 67 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(7) = 8$ и $P(8) = 7$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+8)^{169}+(x+8)^{168}(x+23)+(x+8)^{167}(x+23)^2+\cdots+(x+23)^{169} = 0$

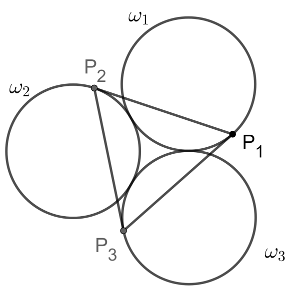
4. **(7 баллов)** Группу с 8 юношами и 8 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 19-м месте, после 50 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, $AB = 36$, $CD = \sqrt{75}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 29. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 16 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a + b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 48$, $AD = 24$, $AA_1 = 12$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$8|x - 4a| + |x - a^2| + 7x - 3a = 0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 5.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 37, 41, 53 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(9) = 10$ и $P(10) = 9$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+9)^{149}+(x+9)^{148}(x+11)+(x+9)^{147}(x+11)^2+\cdots+(x+11)^{149} = 0$

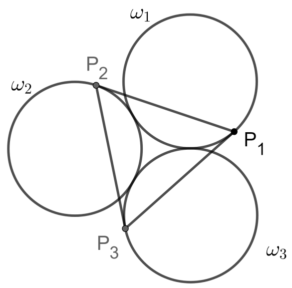
4. **(7 баллов)** Группу с 9 юношами и 9 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 23-м месте, после 40 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AB = 18$, $CD = \sqrt{84}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 31. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 24 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a + b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 42$, $AD = 126$, $AA_1 = 42$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$9|x - 4a| + |x - a^2| + 8x - 2a = 0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 6.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 41, 53, 59 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(11) = 12$ и $P(12) = 11$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+5)^{129}+(x+5)^{128}(x+14)+(x+5)^{127}(x+14)^2+\cdots+(x+14)^{129} = 0$

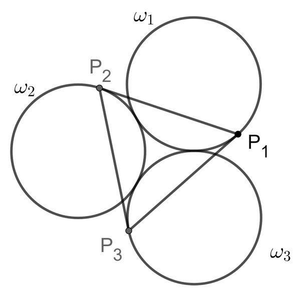
4. **(7 баллов)** Группу с 7 юношами и 7 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 17-м месте, после 30 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, $AB = 24$, $CD = \sqrt{51}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 7. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 36 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a+b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 30$, $AD = 32$, $AA_1 = 20$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$8|x-4a|+|x-a^2|+7x-2a = 0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 7.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 31, 41, 47 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(6) = 7$ и $P(7) = 6$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+6)^{109}+(x+6)^{108}(x+11)+(x+6)^{107}(x+11)^2+\cdots+(x+11)^{109} = 0$

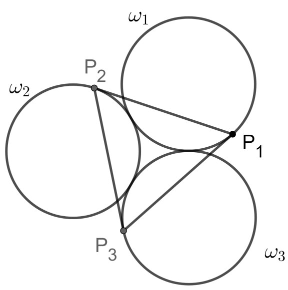
4. **(7 баллов)** Группу с 5 юношами и 5 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 11-м месте, после 20 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, $AB = 30$, $CD = \sqrt{207}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 11. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 32 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a + b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 18$, $AD = 36$, $AA_1 = 9$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$7|x-4a|+|x-a^2|+6x-3a=0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 8.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 47, 61, 71 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(8) = 9$ и $P(9) = 8$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+7)^{89}+(x+7)^{88}(x+25)+(x+7)^{87}(x+25)^2+\cdots+(x+25)^{89} = 0$

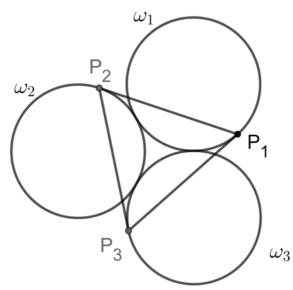
4. **(7 баллов)** Группу с 6 юношами и 6 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 7-м месте, после 50 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$, $AB = 36$, $CD = \sqrt{435}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 13. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 40 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a+b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 18$, $AD = 30$, $AA_1 = 20$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$6|x-4a|+|x-a^2|+5x-3a=0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 9.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 41, 47, 53 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(10) = 11$ и $P(11) = 10$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x) = x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+8)^{99}+(x+8)^{98}(x+26)+(x+8)^{97}(x+26)^2+\cdots+(x+26)^{99}=0$

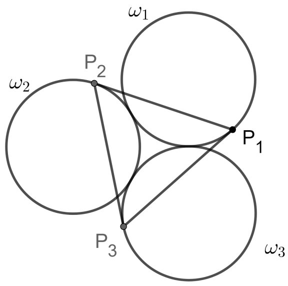
4. **(7 баллов)** Группу с 8 юношами и 8 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 27-м месте, после 40 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB = \angle ADB = 90°$, $AB = 18$, $CD = \sqrt{39}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 23. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 44 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1, P_2, P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a+b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB = 14$, $AD = 60$, $AA_1 = 40$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$5|x-4a|+|x-a^2|+4x-4a=0$$

не имеет решения.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Отборочный (заочный) этап по математике, 2 декабря 2018г.

11 класс, вариант 10.

1. **(5 баллов)** Найдите наименьшее натуральное число n, для которого сумма остатков, при делении на 43, 59, 71 соответственно, равняется n.

2. **(5 баллов)** Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(2)=3$ и $P(3)=2$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь уравнение $P(x)=x$?

3. **(7 баллов)** Решите уравнение $(x+9)^{119}+(x+9)^{118}(x+27)+(x+9)^{117}(x+27)^2+\dots+(x+27)^{119}=0$

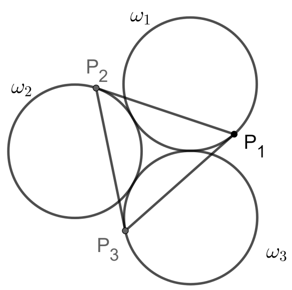
4. **(7 баллов)** Группу с 4 юношами и 4 девушками разбили на пары случайным образом. Найдите вероятность того, что образовалась хотя бы одна пара с двумя девушками. Ответ округлите до сотых.

5. **(8 баллов)** Колода из 54 карт тасуется следующим образом: её делят пополам и карты первой половины располагают по одной между картами второй половины (в том же порядке). Карта на 28-ом месте становится первой, первая — второй, 29-я — третьей, вторая — четвертой и т. д. На каком месте окажется карта, первоначально находившаяся на 8-м месте, после 30 перетасовок?

6. **(8 баллов)** В тетраэдре $ABCD$ известны: $\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$, $AB=24$, $CD=\sqrt{396}$. Найдите длину отрезка DM, где M — точка пересечения медиан грани ABC.

7. **(10 баллов)** Эники, беники ели вареники. Каждый съел по 37. Известно, что беники могли бы разделить вареники между собой поровну. Эников меньше, но они тоже могли бы. Сколько в этом случае досталось бы каждому энику?

8. **(10 баллов)** Окружности $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ радиуса 8 касаются внешним образом друг друга. На каждой окружности выбрано по точке P_1,P_2,P_3 соответственно таким образом, что $P_1P_2=P_2P_3=P_3P_1$ и P_1P_2 касается ω_2, P_2P_3 касается ω_3, P_3P_1 касается ω_1 (см. рисунок). Площадь треугольника $P_1P_2P_3$ может быть записана в виде $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, где a и b – натуральные числа. Найдите величину $a+b$.



Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AB=12$, $AD=24$, $AA_1=6$. На середине ребра A_1B_1 отмечена точка E, а на середине ребра B_1C_1 — точка F. Найдите расстояние между прямыми AE и BF.

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$9|x-4a|+|x-a^2|+8x-4a=0$$

не имеет решения.