11 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2+3x+2=0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1=-1$ и $x_2=-2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2+3x+1=0$, корни которого равны $x_2=-1$, $x_2=-0.5$, то есть не являются целыми числами.

Пусть $n>1$ – натуральное число. Существуют ли попарно различные целые числа $a_0, a_1, \dots a_n$ (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p_0, p_1, \dots p_n \in \{a_0, a_1, \dots a_n\}$ уравнение $p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0 = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой последовательности, если такая последовательность существует. Опишите все такие последовательности.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Что больше: число перестановок из 100 или число сочетаний из 400 по 100?

Задача 3 – стоимость 10 баллов

В неком городе с населением не менее 20000 (двадцати тысяч) человек (с правом избирательного голоса) городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей (не менее 100 человек). Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах более 50% голосов избирателей округа. В целом по городу число сторонников партий A, B и C соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Задача 4 – стоимость 8 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3, длины которых – простые числа. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длина которого равна объёму прямоугольного параллелепипеда со сторонами L_1, L_2 и L_3.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» и её «доказательство». Верна ли эта «теорема», нет ли ошибок в «доказательстве». Если «теорема» верна, подтвердите это (и, по возможности, приведите альтернативное доказательство). А если «теорема» не верна, то приведите контрпример, исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий четырёхугольник, котором три стороны равны и один из углов между равными сторонами – прямой, является квадратом.

Доказательство:

Предположим, противное, то есть пусть существует четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB|=|BC|=|CD|$, а угол $\angle ABC$ – прямой, но в этом четырёхугольнике есть тупой угол $\angle BCD$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \angle BCD$, то есть угол $\angle ABC$ – прямой. Теорема доказана.

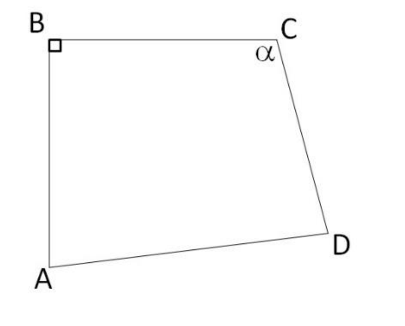

Рис. 1

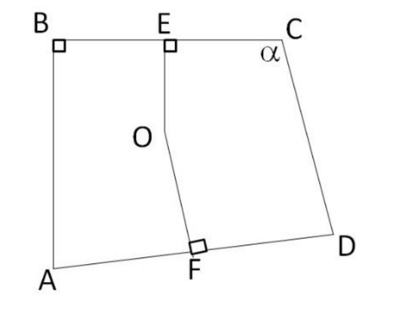

Рис. 2

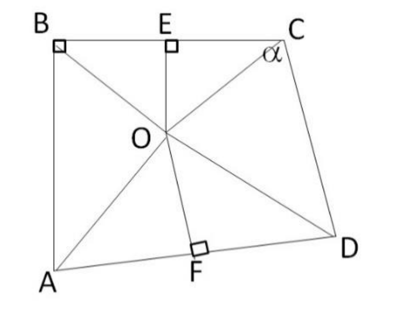

Рис. 3