10 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, корни которого равны $x_2 = -1$, $x_2 = -0.5$, то есть являются вещественными числами.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{230}?

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В неком городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A, B и C соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Задача 4 – стоимость 10 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длины отрезков L и L_1 относятся так, как объемы кубов со сторонами L_2 и L_3 соответственно.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий тупой угол является прямым.

Доказательство:

Пусть α - произвольный тупой угол; построим четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB| = |BC| = |CD|$, $\angle ABC$ – прямой, а $\angle BCD = \alpha$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \alpha$, то есть прямой угол $\angle ABC$ равен тупому углу α. Теорема доказана.

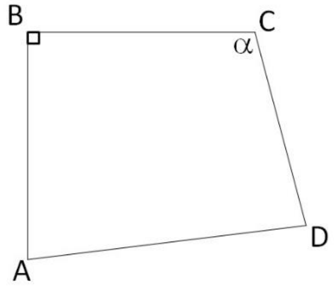

Рис. 1

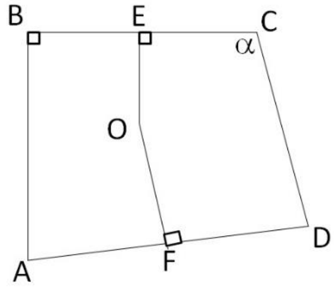

Рис. 2

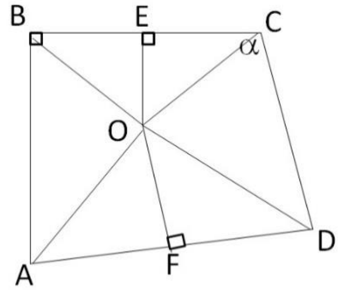

Рис. 3