Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2018.$$

Ответ: 4076360

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2018$. Откуда $n=(2018+1)^2-1=4076360$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 16. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 36

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+16$. Тогда $(x-1)(y-1)=17$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 17. Количество валентинок равно $2\cdot 18=36$.

3. **(7 баллов)** Имеется 5 синих, 6 красных и 7 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 365904

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{11}^5 способами. В промежутки между ними и по краям выберем 7 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{12}^7. Итого получается $C_{11}^5\cdot C_{12}^7$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-4.5; 4.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

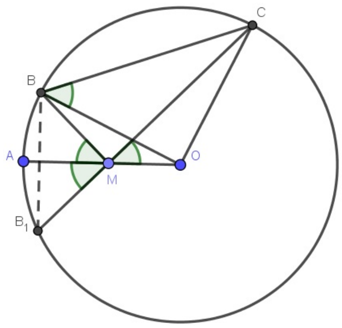
Ответ: 90

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-10\leqslant y-1\leqslant 8$ и $-7\leqslant 2-x\leqslant 11$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 8\cdot 11+2=90$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-4.5, b=d=4.5$.

5. **(8 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 10, $\cos\alpha = \frac{2}{5}$?

Ответ: 8.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2\cdot\cos\alpha\cdot BO = 2\cdot\frac{2}{5}\cdot 10 = 8$

6. **(8 баллов)** Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{7})^{205}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{205}^{k}(\sqrt{7})^{k}$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 149

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{205}^{k+1}(\sqrt{7})^{k+1}}{C_{205}^{k}(\sqrt{7})^{k}}$ больше 1 при $k < \dfrac{205\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{205\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. **(10 баллов)** На доске записано 25 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 25 минут?

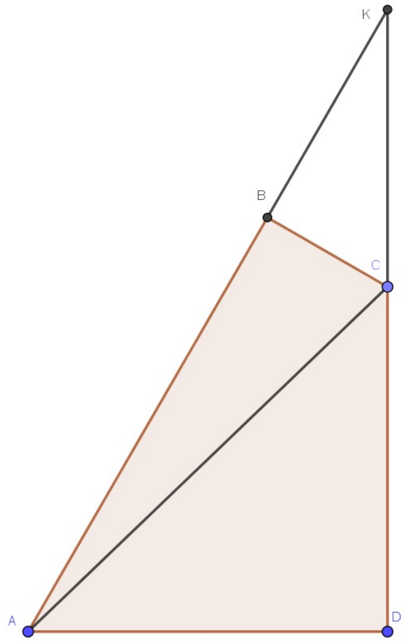
Ответ: 300.

Решение: Изобразим 25 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 25 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{25\cdot(25-1)}{2} = 300$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 300 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 18$, $BC = 12\sqrt{3} - 9$.

Ответ: 30

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x$, $\angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°$, $\angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 24\sqrt{3} - 18$, $KD = KC + CD = 24\sqrt{3}$ и $AD = 24$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 30$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. **(20 баллов)** Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 101 до 200. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 200: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 200. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 2.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2017.$$

Ответ: 4072323

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2017$. Откуда $n=(2017+1)^2-1=4072323$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 18. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 40

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+18$. Тогда $(x-1)(y-1)=19$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 19. Количество валентинок равно $2\cdot 20=40$.

3. **(7 баллов)** Имеется 7 синих, 6 красных и 10 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 1717716

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{13}^7 способами. В промежутки между ними и по краям выберем 10 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{14}^{10}. Итого получается $C_{13}^7\cdot C_{14}^{10}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a,b,c,d принадлежат отрезку $[-5.5;5.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

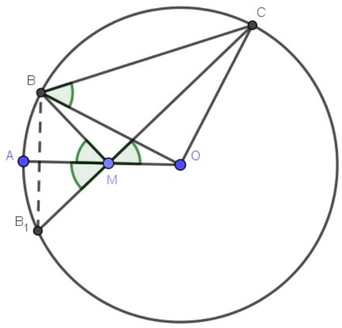
Ответ: 132

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-12\leqslant y-1\leqslant 10$ и $-9\leqslant 2-x\leqslant 13$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 10\cdot 13+2=132$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-5.5, b=d=5.5$.

5. **(8 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 8, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

Ответ: 12.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90° - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180° - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 \cdot \cos\alpha \cdot BO = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 8 = 12$

6. **(8 баллов)** Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{5})^{206}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{206}^k(\sqrt{5})^k$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 143

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{206}^{k+1}(\sqrt{5})^{k+1}}{C_{206}^k(\sqrt{5})^k}$ больше 1 при $k < \dfrac{206\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{206\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. **(10 баллов)** На доске записано 26 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 26 минут?

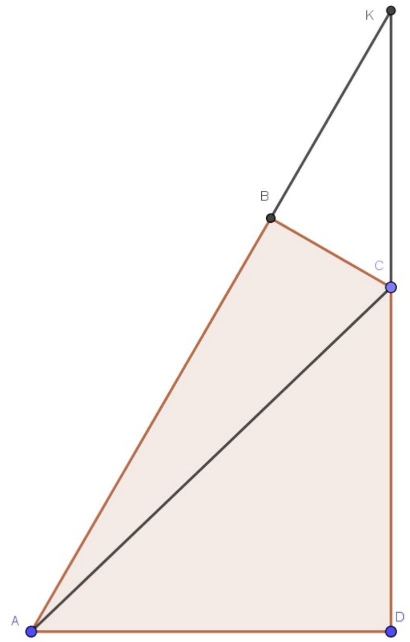
Ответ: 325.

Решение: Изобразим 26 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 26 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{26 \cdot (26-1)}{2} = 325$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 325 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 20,\ BC = 24\sqrt{3} - 10$.

Ответ: 52

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x,\ \angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°,\ \angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 48\sqrt{3} - 20$, $KD = KC + CD = 48\sqrt{3}$ и $AD = 48$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 52$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. **(20 баллов)** Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 102 до 201. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 201: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 201. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open

Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 3.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2016.$$

Ответ: 4068288

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2016$. Откуда $n=(2016+1)^2-1=4068288$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 22. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 48

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+22$. Тогда $(x-1)(y-1)=23$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 23. Количество валентинок равно $2\cdot 24=48$.

3. **(7 баллов)** Имеется 8 синих, 8 красных и 11 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 159279120

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{16}^{8} способами. В промежутки между ними и по краям выберем 11 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{17}^{11}. Итого получается $C_{16}^{8}\cdot C_{17}^{11}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-6.5; 6.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

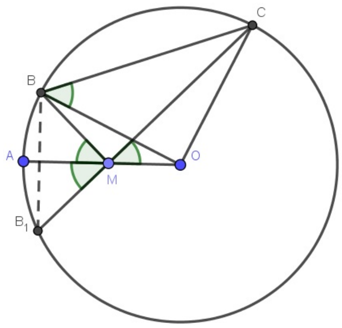
Ответ: 182

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-14\leqslant y-1\leqslant 12$ и $-11\leqslant 2-x\leqslant 15$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 12\cdot 15+2=182$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-6.5, b=d=6.5$.

5. (**8 баллов**) На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 6, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$?

Ответ: 8.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 \cdot \cos\alpha \cdot BO = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = 8$

6. (**8 баллов**) Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{7})^{207}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{207}^k(\sqrt{7})^k$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 150

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{207}^{k+1}(\sqrt{7})^{k+1}}{C_{207}^{k}(\sqrt{7})^{k}}$ больше 1 при $k < \dfrac{207\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{207\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right] + 1$, затем убывают.

7. (**10 баллов**) На доске записано 27 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 27 минут?

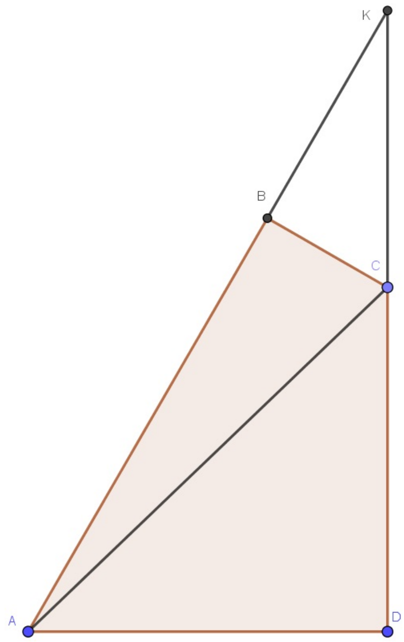
Ответ: 351.

Решение: Изобразим 27 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 27 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{27 \cdot (27-1)}{2} = 351$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 351 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 16,\ BC = 15\sqrt{3} - 8$.

Ответ: 34

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x,\ \angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°,\ \angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 30\sqrt{3} - 16$, $KD = KC + CD = 30\sqrt{3}$ и $AD = 30$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 34$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. **(20 баллов)** Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 103 до 202. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 202: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 202. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 4.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2015.$$

Ответ: 4064255

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2015$. Откуда $n=(2015+1)^2-1=4064255$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 28. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 60

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+28$. Тогда $(x-1)(y-1)=29$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 29. Количество валентинок равно $2\cdot 30=60$.

3. **(7 баллов)** Имеется 8 синих, 7 красных и 12 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 11711700

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{15}^{8} способами. В промежутки между ними и по краям выберем 12 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{16}^{12}. Итого получается $C_{15}^{8}\cdot C_{16}^{12}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-7.5; 7.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

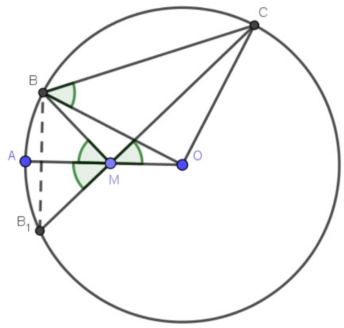
Ответ: 240

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-16\leqslant y-1\leqslant 14$ и $-13\leqslant 2-x\leqslant 17$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 14\cdot 17+2=240$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-7.5, b=d=7.5$.

5. **(8 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 12, $\cos\alpha = \frac{5}{6}$?

Ответ: 20.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 \cdot \cos\alpha \cdot BO = 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot 12 = 20$

6. **(8 баллов)** Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{11})^{208}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{208}^k(\sqrt{11})^k$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 160

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{208}^{k+1}(\sqrt{11})^{k+1}}{C_{208}^k(\sqrt{11})^k}$ больше 1 при $k < \dfrac{208\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{208\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}\right] + 1$, затем убывают.

7. **(10 баллов)** На доске записано 28 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 28 минут?

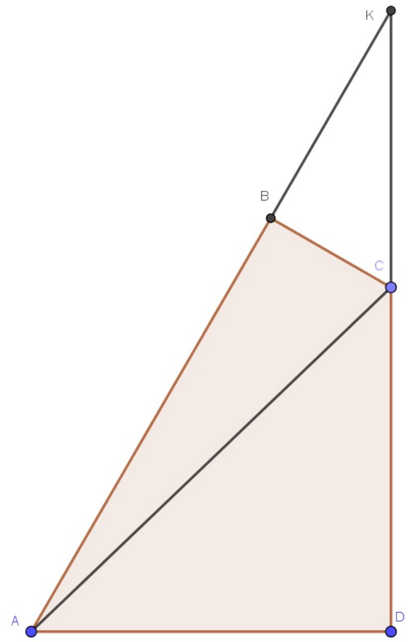
Ответ: 378.

Решение: Изобразим 28 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 28 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{28 \cdot (28-1)}{2} = 378$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 378 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 8$, $BC = 7.5\sqrt{3} - 4$.

Ответ: 17

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x$, $\angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°$, $\angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 15\sqrt{3} - 8$, $KD = KC + CD = 15\sqrt{3}$ и $AD = 15$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 17$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. (20 баллов) Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 104 до 203. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 203: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 203. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 5.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2014.$$

Ответ: 4060224

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2014$. Откуда $n=(2014+1)^2-1=4060224$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 30. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 64

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+30$. Тогда $(x-1)(y-1)=31$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 31. Количество валентинок равно $2\cdot 32=64$.

3. **(7 баллов)** Имеется 9 синих, 7 красных и 14 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 7779200

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{16}^9 способами. В промежутки между ними и по краям выберем 14 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{17}^{14}. Итого получается $C_{16}^9\cdot C_{17}^{14}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-8.5; 8.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

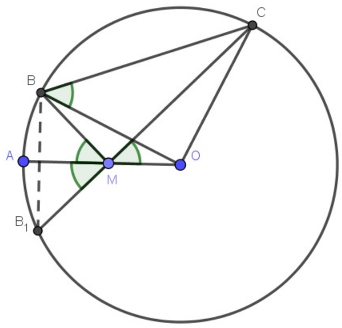
Ответ: 306

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-18\leqslant y-1\leqslant 16$ и $-15\leqslant 2-x\leqslant 19$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 16\cdot 19+2=306$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-8.5, b=d=8.5$.

5. (**8 баллов**) На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 10, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$?

Ответ: 16.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2\cdot\cos\alpha\cdot BO = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot 10 = 16$

6. (**8 баллов**) Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{5})^{209}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{209}^{k}(\sqrt{5})^{k}$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 145

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{209}^{k+1}(\sqrt{5})^{k+1}}{C_{209}^{k}(\sqrt{5})^{k}}$ больше 1 при $k < \dfrac{209\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{209\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. (**10 баллов**) На доске записано 29 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 29 минут?

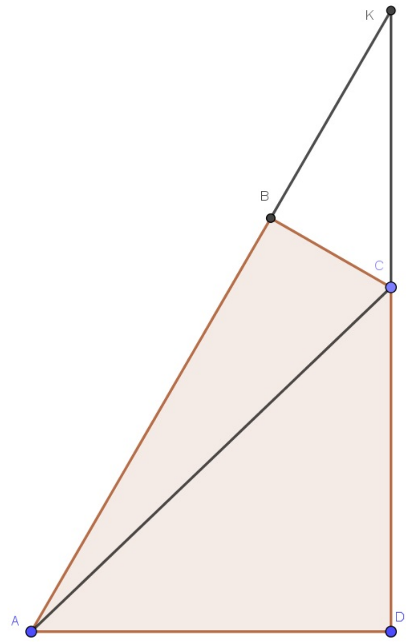
Ответ: 406.

Решение: Изобразим 29 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 29 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{29\cdot(29-1)}{2} = 406$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 406 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 15$, $BC = 18\sqrt{3} - 7.5$.

Ответ: 39

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x$, $\angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°$, $\angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 36\sqrt{3} - 15$, $KD = KC + CD = 36\sqrt{3}$ и $AD = 36$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 39$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. (20 баллов) Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 105 до 204. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 204: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 204. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 6.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2013.$$

Ответ: 4056195

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2013$. Откуда $n=(2013+1)^2-1=4056195$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 36. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 76

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+36$. Тогда $(x-1)(y-1)=37$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 37. Количество валентинок равно $2\cdot 38=76$.

3. **(7 баллов)** Имеется 6 синих, 7 красных и 9 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 3435432

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{13}^6 способами. В промежутки между ними и по краям выберем 9 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{14}^9. Итого получается $C_{13}^6\cdot C_{14}^9$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a,b,c,d принадлежат отрезку $[-8;8]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

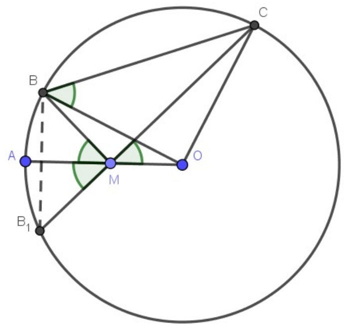
Ответ: 272

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-17\leqslant y-1\leqslant 15$ и $-14\leqslant 2-x\leqslant 18$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 15\cdot 18+2=272$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-8, b=d=8$.

5. **(8 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 12, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$?

Ответ: 6.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2\cdot\cos\alpha\cdot BO = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot 12 = 6$

6. **(8 баллов)** Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{13})^{210}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{210}^k(\sqrt{13})^k$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 165

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{210}^{k+1}(\sqrt{13})^{k+1}}{C_{210}^k(\sqrt{13})^k}$ больше 1 при $k < \dfrac{210\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{210\sqrt{13}-1}{\sqrt{13}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. **(10 баллов)** На доске записано 30 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 30 минут?

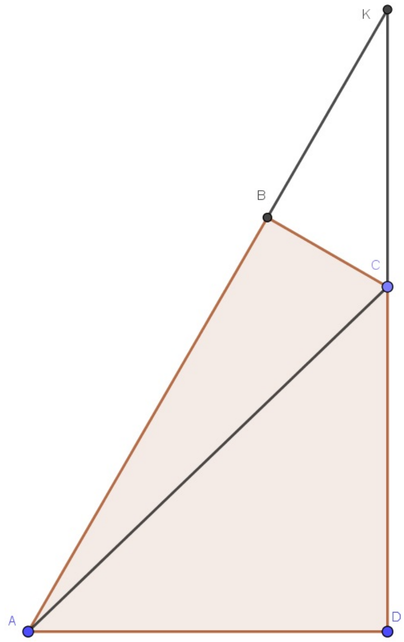
Ответ: 435.

Решение: Изобразим 30 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 30 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{30\cdot(30-1)}{2} = 435$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 435 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 10$, $BC = 12\sqrt{3} - 5$.

Ответ: 26

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x$, $\angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°$, $\angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 24\sqrt{3} - 10$, $KD = KC + CD = 24\sqrt{3}$ и $AD = 24$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 26$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. **(20 баллов)** Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 106 до 205. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 205: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 205. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 7.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2012.$$

Ответ: 4052168

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2012$. Откуда $n=(2012+1)^2-1=4052168$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 40. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 84

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+40$. Тогда $(x-1)(y-1)=41$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 41. Количество валентинок равно $2\cdot 42=84$.

3. **(7 баллов)** Имеется 5 синих, 8 красных и 11 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 468468

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{13}^5 способами. В промежутки между ними и по краям выберем 11 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{14}^{11}. Итого получается $C_{13}^5\cdot C_{14}^{11}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-7;7]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

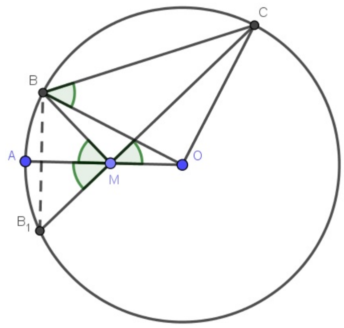
Ответ: 210

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-15\leqslant y-1\leqslant 13$ и $-12\leqslant 2-x\leqslant 16$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 13\cdot 16+2=210$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-7, b=d=7$.

5. **(8 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 9, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$?

Ответ: 6.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2\cdot\cos\alpha\cdot BO = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot 9 = 6$

6. **(8 баллов)** Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{7})^{211}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{211}^k(\sqrt{7})^k$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 153

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{211}^{k+1}(\sqrt{7})^{k+1}}{C_{211}^{k}(\sqrt{7})^{k}}$ больше 1 при $k < \dfrac{211\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{211\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. **(10 баллов)** На доске записано 31 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 31 минут?

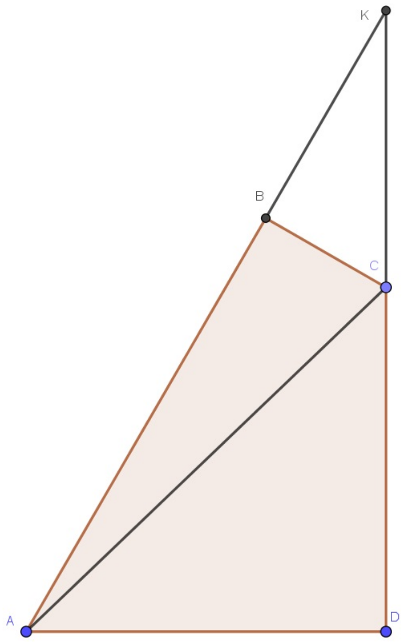
Ответ: 465.

Решение: Изобразим 31 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 31 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{31\cdot(31-1)}{2} = 465$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 465 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2:3:4$. Найдите длину AC, если $CD = 5,\ BC = 6\sqrt{3} - 2.5$.

Ответ: 13

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x,\ \angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°,\ \angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 12\sqrt{3} - 5$, $KD = KC + CD = 12\sqrt{3}$ и $AD = 12$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 13$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. **(20 баллов)** Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 107 до 206. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 206: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 206. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 8.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2011.$$

Ответ: 4048143

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2011$. Откуда $n=(2011+1)^2-1=4048143$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 42. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 88

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+42$. Тогда $(x-1)(y-1)=43$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 43. Количество валентинок равно $2\cdot 44=88$.

3. **(7 баллов)** Имеется 5 синих, 9 красных и 12 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 910910

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{14}^{5} способами. В промежутки между ними и по краям выберем 12 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{15}^{12}. Итого получается $C_{14}^{5}\cdot C_{15}^{12}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-6; 6]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

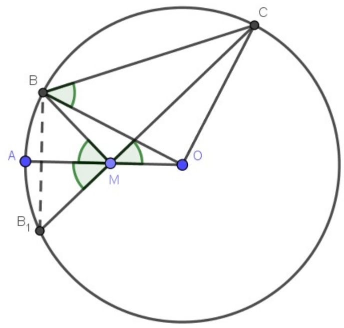
Ответ: 156

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-13\leqslant y-1\leqslant 11$ и $-10\leqslant 2-x\leqslant 14$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 11\cdot 14+2=156$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-6, b=d=6$.

5. **(8 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 21, $\cos\alpha = \frac{4}{7}$?

Ответ: 24.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90° - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180° - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2\cdot\cos\alpha\cdot BO = 2\cdot\frac{4}{7}\cdot 21 = 24$

6. **(8 баллов)** Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{11})^{212}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{212}^k(\sqrt{11})^k$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 163

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{212}^{k+1}(\sqrt{11})^{k+1}}{C_{212}^k(\sqrt{11})^k}$ больше 1 при $k < \dfrac{212\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{212\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. **(10 баллов)** На доске записано 32 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 32 минут?

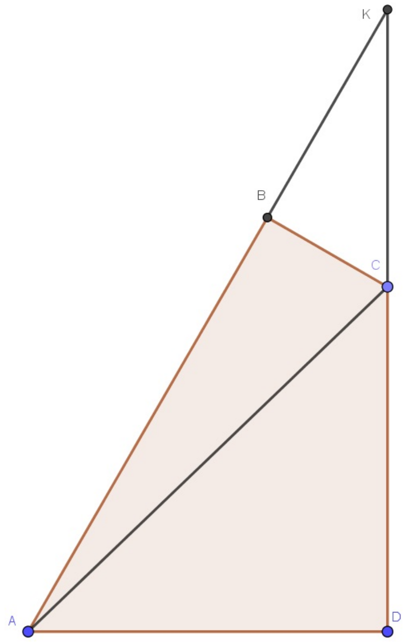
Ответ: 496.

Решение: Изобразим 32 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 32 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{32\cdot(32-1)}{2} = 496$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 496 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 21,\ BC = 14\sqrt{3} - 10.5$.

Ответ: 35

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x,\ \angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°,\ \angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 28\sqrt{3} - 21$, $KD = KC + CD = 28\sqrt{3}$ и $AD = 28$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 35$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. (20 баллов) Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 108 до 207. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 207: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 207. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 9.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2010.$$

Ответ: 4044120

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2010$. Откуда $n=(2010+1)^2-1=4044120$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 46. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 96

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+46$. Тогда $(x-1)(y-1)=47$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 47. Количество валентинок равно $2\cdot 48=96$.

3. **(7 баллов)** Имеется 8 синих, 6 красных и 12 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 1366365

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{14}^{8} способами. В промежутки между ними и по краям выберем 12 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{15}^{12}. Итого получается $C_{14}^{8}\cdot C_{15}^{12}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-5;5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

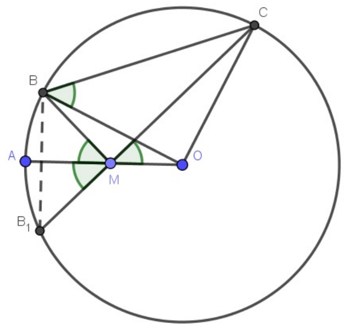
Ответ: 110

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-11\leqslant y-1\leqslant 9$ и $-8\leqslant 2-x\leqslant 12$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 9\cdot 12+2=110$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-5, b=d=5$.

5. (**8 баллов**) На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 15, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$?

Ответ: 18.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2 \cdot \cos\alpha \cdot BO = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 15 = 18$

6. (**8 баллов**) Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{5})^{213}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{213}^k(\sqrt{5})^k$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 147

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{213}^{k+1}(\sqrt{5})^{k+1}}{C_{213}^{k}(\sqrt{5})^{k}}$ больше 1 при $k < \dfrac{213\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{213\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. (**10 баллов**) На доске записано 33 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 33 минут?

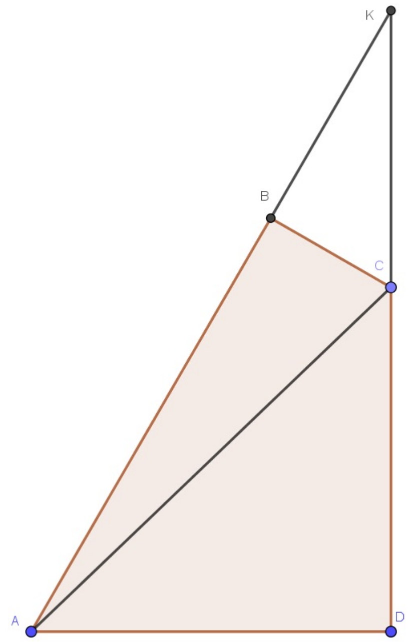
Ответ: 528.

Решение: Изобразим 33 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 33 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{33\cdot(33-1)}{2} = 528$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 528 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2:3:4$. Найдите длину AC, если $CD = 9$, $BC = 6\sqrt{3} - 4.5$.

Ответ: 15

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x$, $\angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°$, $\angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 12\sqrt{3} - 9$, $KD = KC + CD = 12\sqrt{3}$ и $AD = 12$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 15$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. (20 баллов) Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 109 до 208. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 208: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 208. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

9 класс, вариант 10.

1. **(5 баллов)** Найдите значение n, для которого имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=2019.$$

Ответ: 4080399

Решение: Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=2019$. Откуда $n=(2019+1)^2-1=4080399$.

2. **(5 баллов)** На день св.Валентина каждый ученик школы подарил каждой ученице по валентинке. Выяснилось, что количество валентинок больше количества всех учащихся на 52. Сколько валентинок было подарено?

Ответ: 108

Решение: Пусть x, y — соответственно количество мальчиков и девочек в школе. По условию, $xy=x+y+52$. Тогда $(x-1)(y-1)=53$. Следовательно, числа $x-1$ и $y-1$ равны 1 и 53. Количество валентинок равно $2\cdot 54=108$.

3. **(7 баллов)** Имеется 7 синих, 7 красных и 12 белых лампочек. Сколькими способами из них (используя все лампочки) можно составить гирлянду так, чтобы никакие две белые лампочки не шли подряд?

Ответ: 1561560

Решение: Сперва расставим все синие и красные лампочки C_{14}^{7} способами. В промежутки между ними и по краям выберем 12 мест и вставим туда белые лампочки. Всего способов это сделать C_{15}^{12}. Итого получается $C_{14}^{7}\cdot C_{15}^{12}$ способа составить гирлянду из имеющихся лампочек.

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-4; 4]$. Найдите наибольшее значение выражения $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da$.

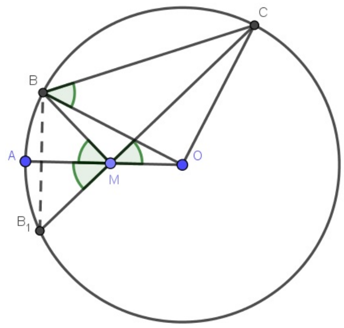
Ответ: 72

Решение: Заметим, что $a+2b+c+2d-ab-bc-cd-da=(a+c)+2(b+d)-(a+c)(b+d)$. Пусть $x=a+c, y=b+d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x+2y-xy=(y-1)(2-x)+2$, где $-9\leqslant y-1\leqslant 7$ и $-6\leqslant 2-x\leqslant 10$. Следовательно, $(y-1)(2-x)+2\leqslant 7\cdot 10+2=72$. Наибольшее значение выражения достигается при $a=c=-4, b=d=4$.

5. **(8 баллов)** На радиусе AO окружности с центром O выбрали точку M, по одну сторону от AO на окружности выбрали точки B и C так, чтобы $\angle AMB = \angle OMC = \alpha$. Найдите длину BC, если радиус окружности равен 12, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$?

Ответ: 18.

Решение:



Рассмотрим точку B_1 симметричную точке B относительно прямой OA. Она так же лежит на окружности и $\angle AMB = \alpha$. Заметим, что точки B_1, M, C лежат на одной прямой, а ΔBB_1M – равнобедренный. Следовательно, вписанный угол $\angle BB_1M = 90^\circ - \alpha$, а центральный угол $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$. ΔBOC – равнобедренный и $\angle OBC = \alpha$. Находим основание равнобедренного треугольника по формуле $BC = 2\cdot\cos\alpha\cdot BO = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot 12 = 18$

6. **(8 баллов)** Раскрыв скобки в выражении $(1+\sqrt{11})^{214}$ по формуле бинома Ньютона, получим слагаемые вида $C_{214}^{k}(\sqrt{11})^{k}$. Найдите значение k, при котором такое слагаемое принимает наибольшее значение.

Ответ: 165

Решение: Отношение двух последовательных слагаемых $\dfrac{C_{214}^{k+1}(\sqrt{11})^{k+1}}{C_{214}^{k}(\sqrt{11})^{k}}$ больше 1 при $k < \dfrac{214\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}$. Тогда слагаемые увеличиваются до $\left[\dfrac{214\sqrt{11}-1}{\sqrt{11}+1}\right]+1$, затем убывают.

7. **(10 баллов)** На доске записано 34 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 34 минут?

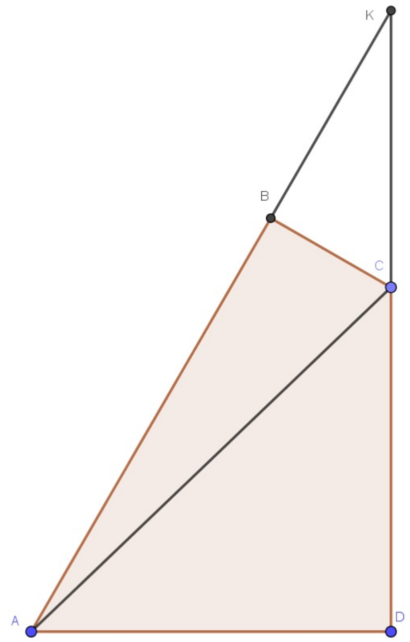
Ответ: 561.

Решение: Изобразим 34 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 34 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{34\cdot(34-1)}{2} = 561$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 561 конфет.

8. **(10 баллов)** Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ градусные величины углов относятся как $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. Найдите длину AC, если $CD = 12$, $BC = 8\sqrt{3} - 6$.

Ответ: 20

Решение:



Четырехугольник – вписанный, следовательно, $\angle A + \angle C = 180°$. Из отношения известно $\angle A = 2x$, $\angle C = 4x$. Тогда $x = 30°$ и $\angle A = 60°$, $\angle B = 3x = 90°$. Продолжим AB и CD до пересечения в точке K. Тогда $\angle K = 30°$, $KC = 2BC = 16\sqrt{3} - 12$, $KD = KC + CD = 16\sqrt{3}$ и $AD = 16$. Из теоремы Пифагора получаем $AC = 20$.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Из точки D, середины основания BC равнобедренного треугольника ABC, опущена высота DE на боковую сторону AC. Описанная окружность треугольника ABD пересекает прямую BE в точках B и F. Докажите, что прямая AF проходит через середину отрезка DE.

Решение: В прямоугольном треугольнике ACD: $\angle ADE = 90° - \angle CDE = \angle ACD = \angle ABD$. Откуда следует, что DE — касательная к описанной окружности треугольника ABD. Тогда $GD^2 = GF \cdot GA$, где G — точка пересечения прямых DE и AF. $\angle AFB = \angle ADB = 90°$ – как вписанные, опирающиеся на одну дугу. В прямоугольном треугольнике AEG отрезок EF является высотой. $\dfrac{GF}{GE} = \cos\angle AGE = \dfrac{GE}{AG} \Rightarrow GE^2 = GF \cdot GA = GD^2$.

10. **(20 баллов)** Вася вписал в клетки таблицы размером 10×10 все натуральные числа от 110 до 209. Он вычислил произведения чисел в каждой строке таблицы и получил набор из десяти чисел. Затем вычислил произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получил набор из десяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: Каждое из произведений чисел, стоящих в десяти строках таблицы, представим в виде произведения простых сомножителей. Выпишем последние одиннадцать простых не превышающие 209: 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Заметим, что каждое из этих одиннадцати чисел может встретиться только в одном из этих десяти произведений, поскольку числа, кратные любому из них больше 209. Следовательно, найдется строка x, произведение чисел в которой будет содержать не менее двух из указанных множителей (по принципу Дирихле). Эти множители будут располагаться в разных столбцах. Два таких множителя обозначим через m и n. Рассмотрим теперь произведения чисел, стоящих в столбцах таблицы. Так как числа m и n не могут располагаться в одном столбце, то ни одно из произведений в столбцах не может совпасть с произведением чисел, стоящих в строке x. Следовательно, полученные наборы не могут оказаться одинаковыми.