9 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $2x^2 + 4x + 1 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два вещественных корня $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}/_2$. Однако, если произвести перестановку первого и второго коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $4x^2 + 2x + 1 = 0$, которое уже не имеет ни одного вещественного корня.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для любой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ не имеет ни одного вещественного корня? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Решение

Уравнение с вещественными коэффициентами $px^2 + qx + r = 0$ не имеет ни одного вещественного корня тогда и только тогда, когда $D = q^2 - 4pr < 0$, то есть, когда $q^2 < 4pr$. Так как p, q, r – это произвольная перестановка различных вещественных чисел a, b и c, то, следовательно, множество всех таких троек – это $\{(a, b, c) : a, b, c \in \boldsymbol{R}, a \neq b, a \neq c, b \neq c, a^2 < 4bc, b^2 < 4ac, c^2 < 4ab\}$. Это множество не является пустым, так как тройка 2, 3, 4 всем перечисленным в спецификации (описании) этого множества условиям: $2^2 < 4 \cdot 3 \cdot 4$, $3^2 < 4 \cdot 2 \cdot 4$, и $4^2 < 4 \cdot 2 \cdot 3$.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{100}?

Решение

Сначала оценим длину десятичной записи 2^{100} снизу. Имеем: $2^{10} = 1024 > 10^3$. Поэтому $2^{100} = (2^{10})^{10} > (10^3)^{10} = 10^{30}$, то есть длина десятичной записи 2^{100} – не менее 31.

Теперь оценим длину десятичной записи 2^{10} сверху. Имеем: $2^{13} = 8192 < 10^4$. Поэтому $2^{100} = 2^9 \times 2^{91} = 512 \times (2^{13})^7 < 512 \times (10^4)^7 = 512 \times 10^{28}$, то есть длина десятичной записи 2^{100} – не более 31.

Вывод: длина десятичной записи 2^{100} – ровно 31.

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В неком городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из двух партий A и B (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A и B соответственно 55% и 45%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Решение

Важное Наблюдение: так как партия выигрывает (вернее – может выиграть) на избирательном участке, когда у неё 50% поддержка на этом участке, то для каждой партии оптимальная стратегия – иметь как можно больше участков, где её сторонники составляют 50% избирателей.

Пусть n – общее число избирателей в городе. По условию в каждом избирательном участке ровно $^{n}/_{100}$ избирателей. Если у партии в целом по городу процент сторонников $p\%$, то число ее сторонников в городе у неё $\frac{pn}{100}$; если k – максимальное число избирательных участков, в которых может победить эта партия, то $\frac{pn}{100k} = 0.5 \times \frac{n}{100}$ откуда получаем $k = 2p$.

Так как по условию задачи у партии A – ровно 55% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_A = 2 \times 55 = 110$; но так как избирательных участков в городе всего 100, то партия A может получить все 100 мест городского собрания, и, следовательно, партия B может не получить ни одного места в городском собрании.

Так как по условию задачи у партии B – ровно 45% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 45 = 90$; поэтому партия B может получить 90 мест городского собрания, и, следовательно, партия A может получить только 10 мест в городском собрании.

Партия	A	B
Максимум мест	100	90
Минимум мест	10	0

Задача 4 – стоимость 10 баллов

В некой стране действует прогрессивный подоходный налог (по ставкам, представленным в таблице ниже). Работник получает зарплату S и хочет попросить прибавки зарплаты на 10%. При какой зарплате S это стоит делать (то есть приведёт к увеличению реального дохода работника)? (Замечание: зарплата исчисляется в целых числах)

Ежемесячный доход	Ставка налога
до 10000	5%
от 10001 до 20000	10%
от 20001 до 30000	15%
от 30001 до 40000	20%
от 40001 до 50000	25%
более 50001	30%

Решение

Заметим, что прибавка зарплаты 10% – это зарплата $1.1S$. Рутинное решение – аккуратный разбор случаев. Однако, задачу можно решить без разбора случаев следующим образом.

Заметим, что каждый раз при переходе с зарплаты S со ставкой налога k на зарплату $1.1S$, когда происходит повышение ставки налога, новая ставка становится $(k + 0.05)$. Поэтому вопрос об увеличении реального дохода работника превращается в неравенство $(1 - k)S < (1 - k - 0.05) \times (1.1S) = 1.1(1 - k)S - 0.055S$; следовательно, $0.055S < 0.1(1 - k)S$, то есть $0.55 < (1 - k)$ или $k < 0.45$, что всегда верно в условиях задачи (так как максимальная ставка налога 30%).

Вывод: Работнику в любом случае имеет смысл просить прибавки зарплаты на 10%.

Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий остроугольный треугольник является равносторонним.

Доказательство:

Возьмем произвольный остроугольный треугольник ΔABC и проведем биссектрису BD угла $\angle ABC$ (см. рис. 1). Построим срединный перпендикуляр EO к стороне AC, где O – точка пересечения с биссектрисой BD (см. рис. 2). Опустим из O перпендикуляры на стороны AB и BC; соединим O с вершинами A и C (см. рис. 3). По построению $|OA| = |OC|$. Имеем: $\Delta OFB = \Delta OGB$ по стороне OB и двум углам; следовательно, $|BF| = |BG|$ и $|OF| = |OG|$. Также имеем: $\Delta OFA = \Delta OGC$, так как эти треугольники прямоугольные и $|OF| = |OG|$, $|OA| = |OC|$; следовательно, $|FA| = |GC|$. Поэтому $|BA| = |BF| + |FA| = |BG| + |GC| = |BC|$, то есть ΔABC является равнобедренным. Утверждение теоремы, является следствием из приведённого доказательства: вместо вершины B можно было выбрать вершину A и показать, что $|AB| = |AC|$. Поэтому $|AB| = |BC| = |CA|$, что и требовалось доказать.

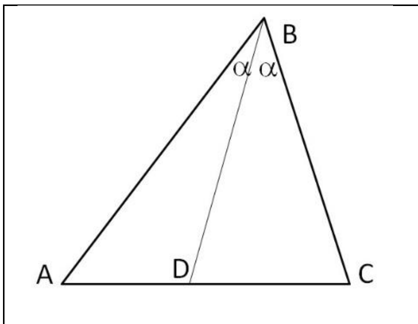

Рис. 1

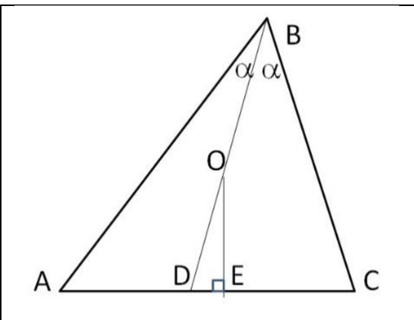

Рис. 2

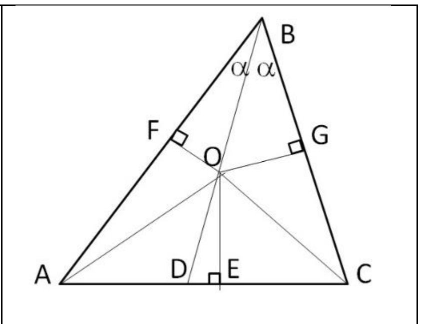

Рис. 3

Решение

На самом деле мы доказываем (методом от противного), что *в остроугольном не равнобедренном треугольнике серединный перпендикуляр к стороне и биссектриса противолежащего угла имеют точку пересечения вне треугольника*. – Действительно, в противном случае мы приходим к выводу (см. «доказательство»), что наш треугольник должен быть равнобедренным.