Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+2) = f(x) + 4x + 2$

Ответ: 999001

Решение: В уравнение $f(x+2) - f(x) = 4x + 2$ будем подставлять вместо x числа $0, 2, 4, \ldots, 998$. Получим:

$$f(2) - f(0) = 4 \cdot 0 + 2$$
$$f(4) - f(2) = 4 \cdot 2 + 2$$
$$\vdots$$
$$f(1000) - f(998) = 4 \cdot 998 + 2.$$

Складывая равенства получим: $f(1000) - f(0) = 4 \cdot (0 + 2 + 4 + \cdots + 998) + 2 \cdot 500 = 4 \cdot \dfrac{998 \cdot 500}{2} + 1000 = 999000$. Тогда $f(1000) = 999001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 62 положительных и 70 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 5

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.
1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x - 1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 70 + 62$, то есть $x = 12$.
2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(12 - y)$. Каждый "положительный" $(y - 1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(11 - y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (12-y)(11-y) = 62 \Rightarrow y^2 - 12y + 35 = 0 \Rightarrow y = 5$ или $y = 7$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 70 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 30 минут?

Ответ: 832040

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-4.5, 4.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 90

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-10 \leqslant y - 1 \leqslant 8$ и $-7 \leqslant 2 - x \leqslant 11$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 8 \cdot 11 + 2 = 90$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -4.5, b = d = 4.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 34 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 34 минут?

Ответ: 561.

Решение: Изобразим 34 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 34 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{34 \cdot (34 - 1)}{2} = 561$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 561 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2019$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1010

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2019$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2019$. Следовательно, $b + c = 2019$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1010

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 12, \\ y^2 + yz + z^2 = 25, \\ z^2 + xz + x^2 = 37. \end{cases}$$

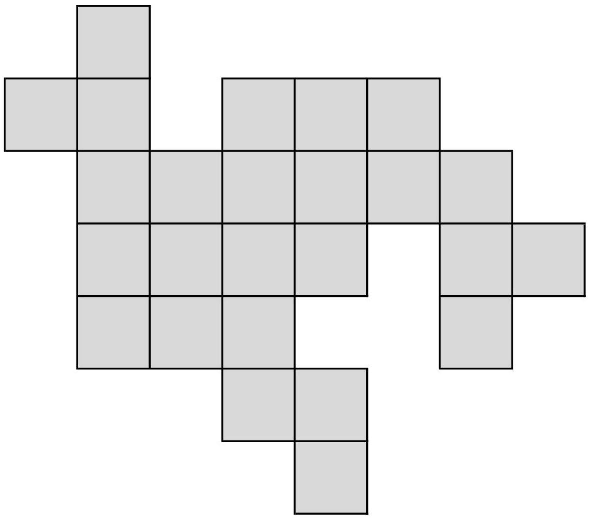
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 20

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 12$, $BC^2 = 25$, $AC^2 = 37$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5$. Откуда получаем ответ.

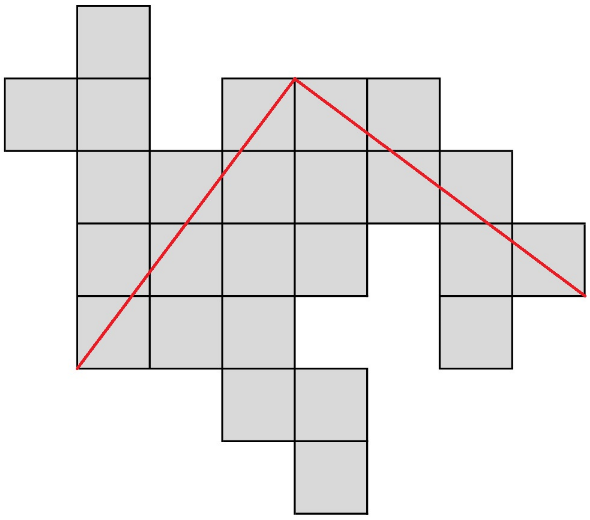
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 2.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+2) = f(x) + 4x + 2$

Ответ: 3998001

Решение: В уравнение $f(x+2) - f(x) = 4x + 2$ будем подставлять вместо x числа $0, 2, 4, \ldots, 1998$. Получим:

$$f(2) - f(0) = 4 \cdot 0 + 2$$
$$f(4) - f(2) = 4 \cdot 2 + 2$$
$$\vdots$$
$$f(2000) - f(1998) = 4 \cdot 1998 + 2.$$

Складывая равенства получим: $f(2000) - f(0) = 4 \cdot (0 + 2 + 4 + \cdots + 1998) + 2 \cdot 1000 = 4 \cdot \dfrac{1998 \cdot 1000}{2} + 2000 = 3998000$. Тогда $f(2000) = 3998001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 68 положительных и 64 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 4

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.

1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x - 1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 64 + 68$, то есть $x = 12$.

2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(12 - y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(11 - y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (12-y)(11-y) = 68 \Rightarrow y^2 - 12y + 32 = 0 \Rightarrow y = 4$ или $y = 8$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 64 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 28 минут?

Ответ: 317811

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-5.5, 5.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 132

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-12 \leqslant y - 1 \leqslant 10$ и $-9 \leqslant 2 - x \leqslant 13$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 10 \cdot 13 + 2 = 132$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -5.5, b = d = 5.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 33 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 33 минут?

Ответ: 528.

Решение: Изобразим 33 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 33 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{33 \cdot (33 - 1)}{2} = 528$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 528 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2021$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1011

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2021$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2021$. Следовательно, $b + c = 2021$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1011

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 12, \\ y^2 + yz + z^2 = 16, \\ z^2 + xz + x^2 = 28. \end{cases}$$

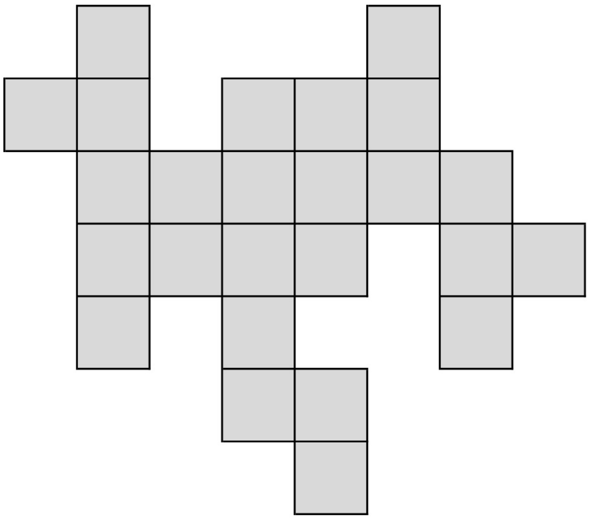
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 16

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 12$, $BC^2 = 16$, $AC^2 = 28$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4$. Откуда получаем ответ.

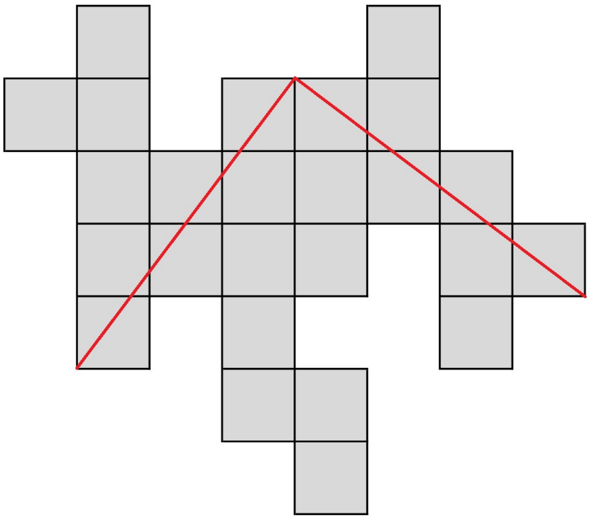
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 3.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 3000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+2) = f(x) + 3x + 2$

Ответ: 6748501

Решение: В уравнение $f(x+2) - f(x) = 3x + 2$ будем подставлять вместо x числа $0, 2, 4, \ldots, 2998$. Получим:

$$f(2) - f(0) = 3 \cdot 0 + 2$$
$$f(4) - f(2) = 3 \cdot 2 + 2$$
$$\vdots$$
$$f(3000) - f(2998) = 3 \cdot 2998 + 2.$$

Складывая равенства получим: $f(3000) - f(0) = 3 \cdot (0 + 2 + 4 + \cdots + 2998) + 2 \cdot 1500 = 3 \cdot \dfrac{2998 \cdot 1500}{2} + 3000 = 6748500$. Тогда $f(3000) = 6748501$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 78 положительных и 54 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 3

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.
1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x-1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 54 + 78$, то есть $x = 12$.
2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(12 - y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(11 - y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (12-y)(11-y) = 78 \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0 \Rightarrow y = 3$ или $y = 9$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 54 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 26 минут?

Ответ: 121393

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-6.5, 6.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 182

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-14 \leqslant y - 1 \leqslant 12$ и $-11 \leqslant 2 - x \leqslant 15$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 12 \cdot 15 + 2 = 182$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -6.5, b = d = 6.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 32 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 32 минут?

Ответ: 496.

Решение: Изобразим 32 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 32 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{32 \cdot (32 - 1)}{2} = 496$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 496 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2023$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1012

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2023$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2023$. Следовательно, $b + c = 2023$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1012

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 12, \\ y^2 + yz + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 21. \end{cases}$$

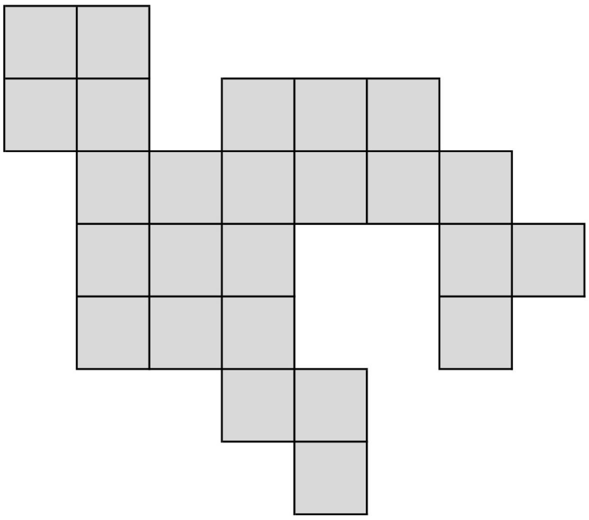
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 12

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 12$, $BC^2 = 9$, $AC^2 = 21$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3$. Откуда получаем ответ.

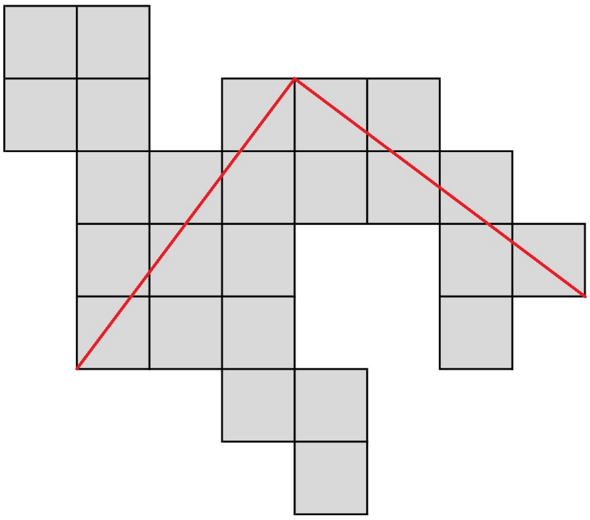
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 4.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 4000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+2) = f(x) + 3x + 2$

Ответ: 11998001

Решение: В уравнение $f(x+2) - f(x) = 3x + 2$ будем подставлять вместо x числа $0, 2, 4, \ldots, 3998$. Получим:

$$f(2) - f(0) = 3 \cdot 0 + 2$$
$$f(4) - f(2) = 3 \cdot 2 + 2$$
$$\vdots$$
$$f(4000) - f(3998) = 3 \cdot 3998 + 2.$$

Складывая равенства получим: $f(4000) - f(0) = 3 \cdot (0 + 2 + 4 + \cdots + 3998) + 2 \cdot 2000 = 3 \cdot \dfrac{3998 \cdot 2000}{2} + 4000 = 11998000$. Тогда $f(4000) = 11998001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 92 положительных и 40 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 2

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.

1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x-1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 40 + 92$, то есть $x = 12$.

2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(12-y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(11-y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (12-y)(11-y) = 92 \Rightarrow y^2 - 12y + 20 = 0 \Rightarrow y = 2$ или $y = 10$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 40 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 24 минут?

Ответ: 46368

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-7.5, 7.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 240

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-16 \leqslant y - 1 \leqslant 14$ и $-13 \leqslant 2 - x \leqslant 17$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 14 \cdot 17 + 2 = 240$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -7.5, b = d = 7.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 31 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 31 минут?

Ответ: 465.

Решение: Изобразим 31 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 31 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{31 \cdot (31 - 1)}{2} = 465$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 465 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2025$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1013

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2025$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2025$. Следовательно, $b + c = 2025$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1013

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 27, \\ y^2 + yz + z^2 = 25, \\ z^2 + xz + x^2 = 52. \end{cases}$$

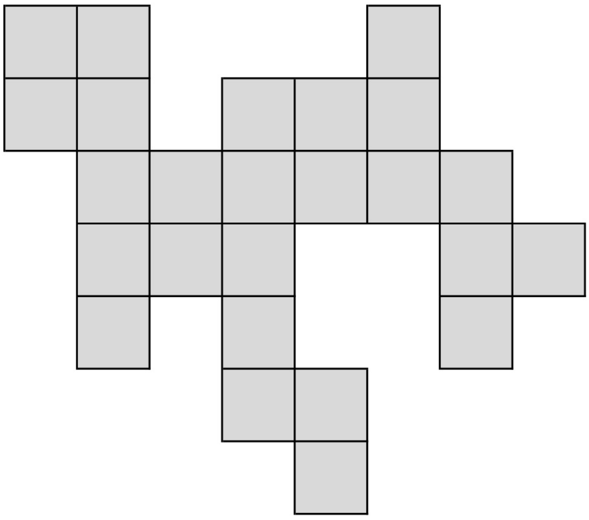
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 30

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 27$, $BC^2 = 25$, $AC^2 = 52$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 5$. Откуда получаем ответ.

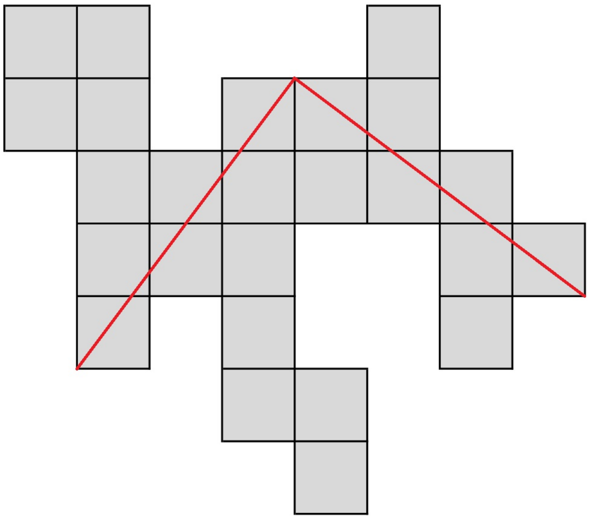
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 5.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1500$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+3) = f(x) + 2x + 3$

Ответ: 750001

Решение: В уравнение $f(x+3) - f(x) = 2x + 3$ будем подставлять вместо x числа $0, 3, 6, \ldots, 1497$. Получим:

$$f(3) - f(0) = 2 \cdot 0 + 3$$
$$f(6) - f(3) = 2 \cdot 3 + 3$$
$$\vdots$$
$$f(1500) - f(1497) = 2 \cdot 1497 + 3.$$

Складывая равенства получим: $f(1500) - f(0) = 2 \cdot (0 + 3 + 6 + \cdots + 1497) + 3 \cdot 500 = 2 \cdot \dfrac{1497 \cdot 500}{2} + 1500 = 750000$. Тогда $f(1500) = 750001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 50 положительных и 60 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 5

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.

1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x-1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 60 + 50$, то есть $x = 11$.

2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(11-y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(10-y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (11-y)(10-y) = 50 \Rightarrow y^2 - 11y + 30 = 0 \Rightarrow y = 5$ или $y = 6$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 60 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 22 минут?

Ответ: 17711

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-8.5, 8.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 306

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-18 \leqslant y - 1 \leqslant 16$ и $-15 \leqslant 2 - x \leqslant 19$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 16 \cdot 19 + 2 = 306$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -8.5, b = d = 8.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 30 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 30 минут?

Ответ: 435.

Решение: Изобразим 30 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 30 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{30 \cdot (30 - 1)}{2} = 435$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 435 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2027$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1014

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2027$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2027$. Следовательно, $b + c = 2027$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1014

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 27, \\ y^2 + yz + z^2 = 16, \\ z^2 + xz + x^2 = 43. \end{cases}$$

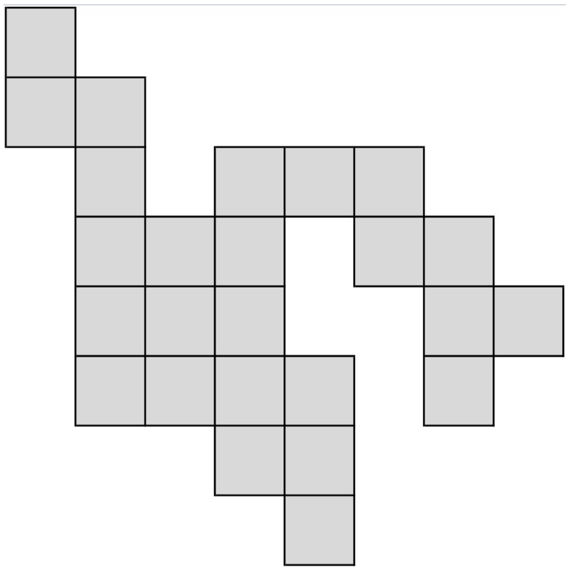
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 24

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 27$, $BC^2 = 16$, $AC^2 = 43$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 4$. Откуда получаем ответ.

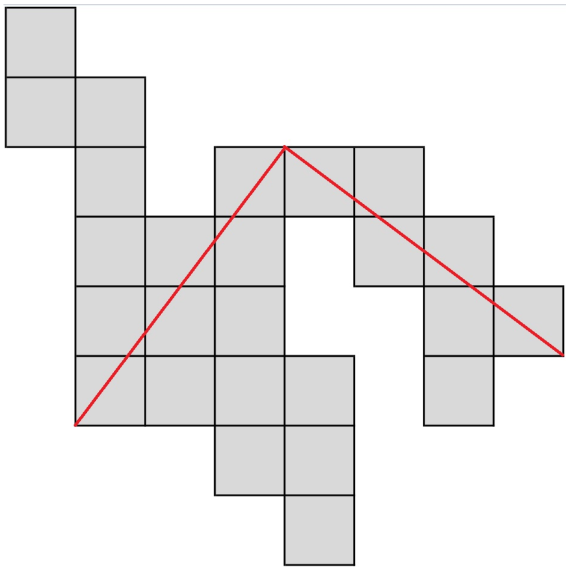
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open

Олимпиада по математике

Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 6.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 3000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+3) = f(x) + 2x + 3$

Ответ: 3000001

Решение: В уравнение $f(x+3) - f(x) = 2x + 3$ будем подставлять вместо x числа $0, 3, 6, \ldots, 2997$. Получим:

$$f(3) - f(0) = 2 \cdot 0 + 3$$
$$f(6) - f(3) = 2 \cdot 3 + 3$$
$$\vdots$$
$$f(3000) - f(2997) = 2 \cdot 2997 + 3.$$

Складывая равенства получим: $f(3000) - f(0) = 2 \cdot (0 + 3 + 6 + \cdots + 2997) + 3 \cdot 1000 = 2 \cdot \dfrac{2997 \cdot 1000}{2} + 3000 = 3000000$. Тогда $f(3000) = 3000001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 54 положительных и 56 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 4

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.

1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x - 1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 56 + 54$, то есть $x = 11$.

2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(11 - y)$. Каждый "положительный" $(y - 1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(10 - y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (11-y)(10-y) = 54 \Rightarrow y^2 - 11y + 28 = 0 \Rightarrow y = 4$ или $y = 7$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 56 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 20 минут?

Ответ: 6765

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-9.5, 9.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 380

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-20 \leqslant y - 1 \leqslant 18$ и $-17 \leqslant 2 - x \leqslant 21$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 18 \cdot 21 + 2 = 380$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -9.5, b = d = 9.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 29 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 29 минут?

Ответ: 406.

Решение: Изобразим 29 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 29 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{29 \cdot (29 - 1)}{2} = 406$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 406 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2029$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1015

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2029$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2029$. Следовательно, $b + c = 2029$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1015

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 27, \\ y^2 + yz + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 36. \end{cases}$$

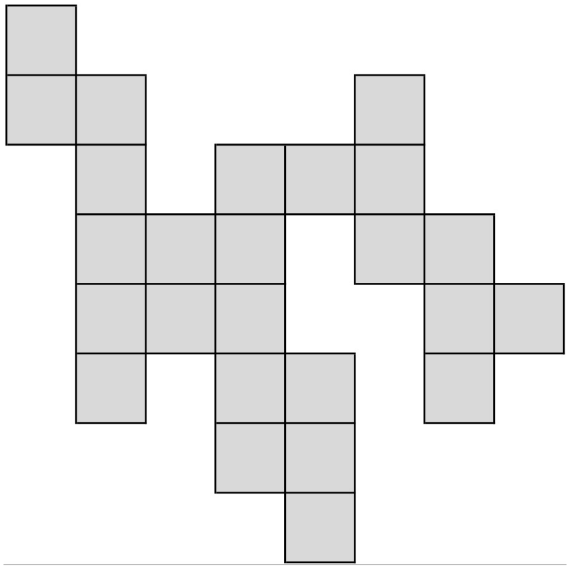
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 18

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 27$, $BC^2 = 9$, $AC^2 = 36$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\dfrac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3$. Откуда получаем ответ.

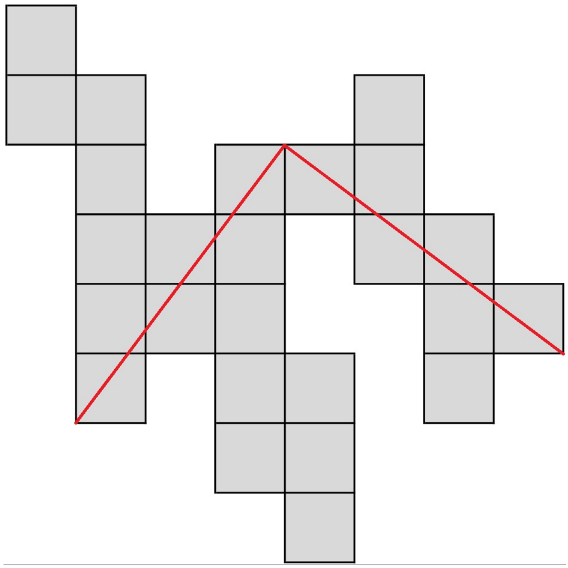
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 7.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 4500$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+3) = f(x) + 2x + 3$

Ответ: 6750001

Решение: В уравнение $f(x+3) - f(x) = 2x + 3$ будем подставлять вместо x числа $0, 3, 6, \ldots, 4497$. Получим:

$$f(3) - f(0) = 2 \cdot 0 + 3$$
$$f(6) - f(3) = 2 \cdot 3 + 3$$
$$\vdots$$
$$f(4500) - f(4497) = 2 \cdot 4497 + 3.$$

Складывая равенства получим: $f(4500) - f(0) = 2 \cdot (0 + 3 + 6 + \cdots + 4497) + 3 \cdot 1500 = 2 \cdot \dfrac{4497 \cdot 1500}{2} + 4500 = 6750000$. Тогда $f(4500) = 6750001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 62 положительных и 48 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 3

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.
1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x-1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 48 + 62$, то есть $x = 11$.
2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(11 - y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(10 - y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (11-y)(10-y) = 62 \Rightarrow y^2 - 11y + 24 = 0 \Rightarrow y = 3$ или $y = 8$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 48 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 18 минут?

Ответ: 2584

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-10.5, 10.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 462

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-22 \leqslant y - 1 \leqslant 20$ и $-19 \leqslant 2 - x \leqslant 23$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 20 \cdot 23 + 2 = 462$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -10.5, b = d = 10.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 28 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 28 минут?

Ответ: 378.

Решение: Изобразим 28 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 28 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{28 \cdot (28 - 1)}{2} = 378$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 378 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2031$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1016

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2031$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2031$. Следовательно, $b + c = 2031$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1016

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 48, \\ y^2 + yz + z^2 = 25, \\ z^2 + xz + x^2 = 73. \end{cases}$$

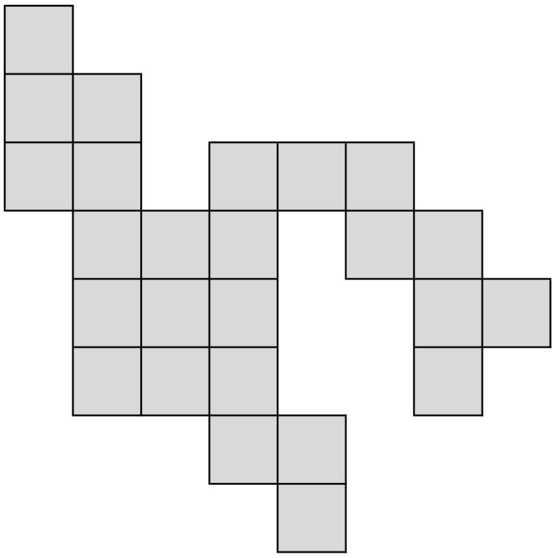
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 40

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 48$, $BC^2 = 25$, $AC^2 = 73$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5$. Откуда получаем ответ.

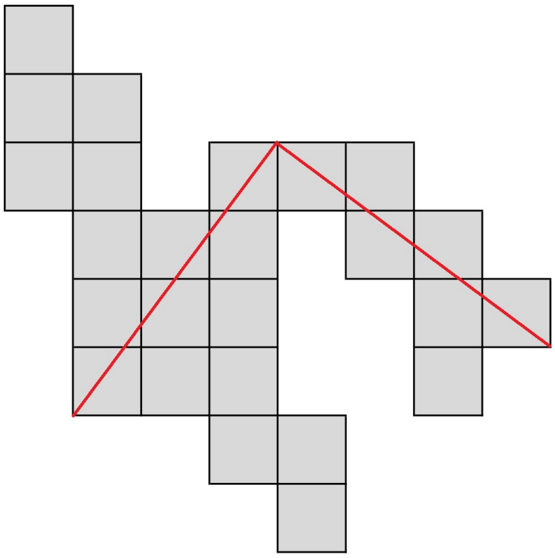
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 8.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 6000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+3) = f(x) + 2x + 3$

Ответ: 12000001

Решение: В уравнение $f(x+3) - f(x) = 2x + 3$ будем подставлять вместо x числа $0, 3, 6, \ldots, 5997$. Получим:

$$f(3) - f(0) = 2 \cdot 0 + 3$$
$$f(6) - f(3) = 2 \cdot 3 + 3$$
$$\vdots$$
$$f(6000) - f(5997) = 2 \cdot 5997 + 3.$$

Складывая равенства получим: $f(6000) - f(0) = 2 \cdot (0 + 3 + 6 + \cdots + 5997) + 3 \cdot 2000 = 2 \cdot \dfrac{5997 \cdot 2000}{2} + 6000 = 12000000$. Тогда $f(6000) = 12000001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 42 положительных и 48 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 4

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.

1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x-1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 48 + 42$, то есть $x = 10$.

2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(10-y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(9-y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (10-y)(9-y) = 42 \Rightarrow y^2 - 10y + 24 = 0 \Rightarrow y = 4$ или $y = 6$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 48 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 16 минут?

Ответ: 987

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-11.5, 11.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 552

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-24 \leqslant y - 1 \leqslant 22$ и $-21 \leqslant 2 - x \leqslant 25$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 22 \cdot 25 + 2 = 552$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -11.5, b = d = 11.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 27 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 27 минут?

Ответ: 351.

Решение: Изобразим 27 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 27 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{27 \cdot (27 - 1)}{2} = 351$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 351 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2033$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1017

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2033$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2033$. Следовательно, $b + c = 2033$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1017

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 48, \\ y^2 + yz + z^2 = 16, \\ z^2 + xz + x^2 = 64. \end{cases}$$

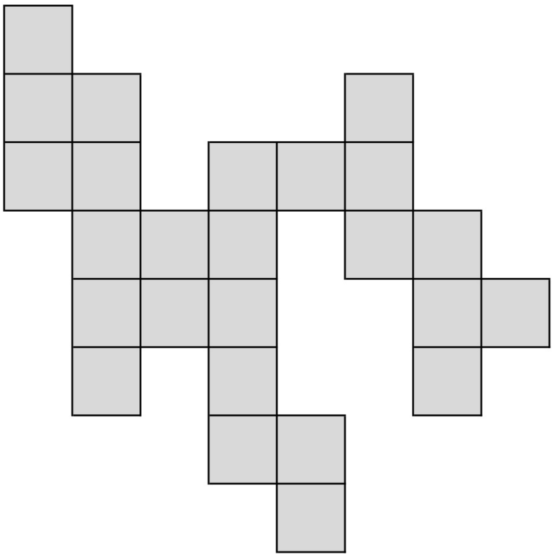
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 32

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 48$, $BC^2 = 16$, $AC^2 = 64$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4$. Откуда получаем ответ.

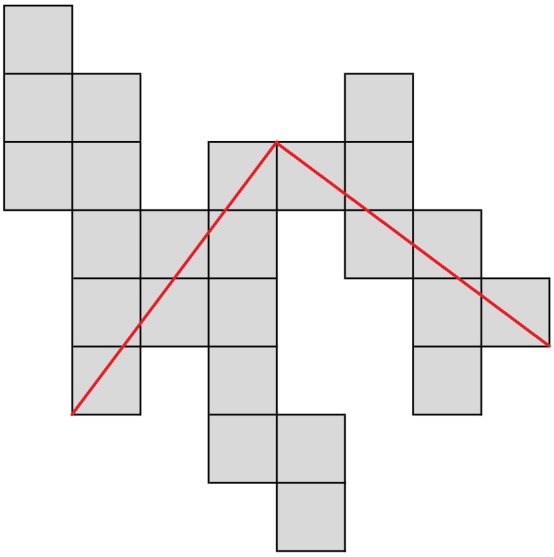
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 9.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+4) = f(x) + 3x + 4$

Ответ: 1499001

Решение: В уравнение $f(x+4) - f(x) = 3x + 4$ будем подставлять вместо x числа $0, 4, 8, \ldots, 1996$. Получим:

$$\begin{gathered} f(4) - f(0) = 3 \cdot 0 + 4 \\ f(8) - f(4) = 3 \cdot 4 + 4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(2000) - f(1996) = 3 \cdot 1996 + 4. \end{gathered}$$

Складывая равенства получим: $f(2000) - f(0) = 3 \cdot (0 + 4 + 8 + \cdots + 1996) + 4 \cdot 500 = 3 \cdot \dfrac{1996 \cdot 500}{2} + 2000 = 1499000$. Тогда $f(2000) = 1499001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 48 положительных и 42 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 3

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.
1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x-1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 42 + 48$, то есть $x = 10$.
2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(10-y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(9-y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (10-y)(9-y) = 48 \Rightarrow y^2 - 10y + 21 = 0 \Rightarrow y = 3$ или $y = 7$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 42 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 14 минут?

Ответ: 377

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-12.5, 12.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 650

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-26 \leqslant y - 1 \leqslant 24$ и $-23 \leqslant 2 - x \leqslant 27$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 24 \cdot 27 + 2 = 650$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -12.5, b = d = 12.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 26 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 26 минут?

Ответ: 325.

Решение: Изобразим 26 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 26 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{26 \cdot (26 - 1)}{2} = 325$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 325 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2035$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1018

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2035$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2035$. Следовательно, $b + c = 2035$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1018

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 48, \\ y^2 + yz + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 57. \end{cases}$$

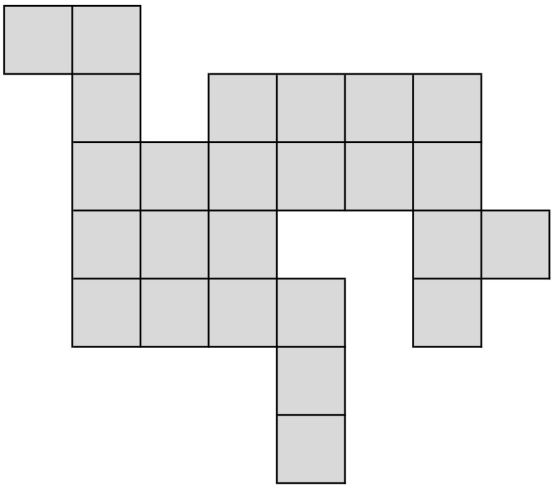
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 24

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 48$, $BC^2 = 9$, $AC^2 = 57$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3$. Откуда получаем ответ.

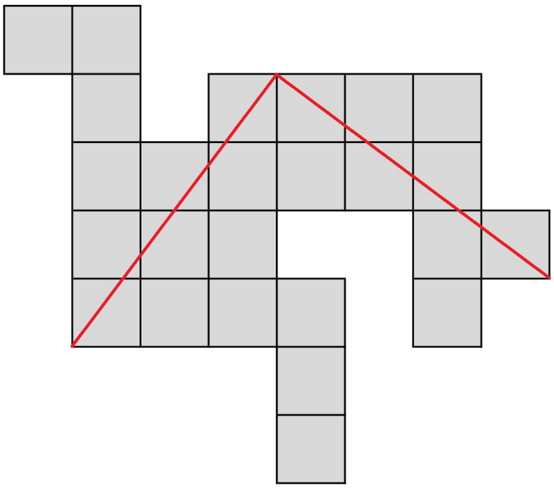
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.

Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

Второй отборочный (заочный) этап, 22 декабря 2018г.

10 класс, вариант 10.

1. **(5 баллов)** Найдите значение функции $f(x)$ в точке $x_0 = 4000$, если $f(0) = 1$ и для любого x выполняется равенство $f(x+4) = f(x) + 3x + 4$

Ответ: 5998001

Решение: В уравнение $f(x+4) - f(x) = 3x + 4$ будем подставлять вместо x числа $0, 4, 8, \ldots, 3996$. Получим:

$$f(4) - f(0) = 3 \cdot 0 + 4$$
$$f(8) - f(4) = 3 \cdot 4 + 4$$
$$\vdots$$
$$f(4000) - f(3996) = 3 \cdot 3996 + 4.$$

Складывая равенства получим: $f(4000) - f(0) = 3 \cdot (0 + 4 + 8 + \cdots + 3996) + 4 \cdot 1000 = 3 \cdot \dfrac{3996 \cdot 1000}{2} + 4000 = 5998000$. Тогда $f(4000) = 5998001$.

2. **(5 баллов)** На всемирной конференции метеорологов каждый участник по очереди объявлял среднемесячную температуру в его родном городе. Все остальные в этот момент записывали произведение температур в его и своем городах. Всего было записано 36 положительных и 36 отрицательных чисел. Какое наименьшее количество раз могла быть объявлена положительная температура?

Ответ: 3

Решение: При решении не будем рассматривать города с нулевой температурой, так как при взаимодействии с ними не появляется ни положительных, ни отрицательных чисел.

1) Пусть на конференции было x участников, каждый из них дал $x-1$ ответов, поэтому $x(x-1) = 36 + 36$, то есть $x = 9$.

2) Пусть на конференции было y человек "с положительной температурой", тогда "с отрицательной " было $(9-y)$. Каждый "положительный" $(y-1)$ раз записал положительное число, а каждый "отрицтельный" — $(8-y)$ раз. Тогда $y(y-1) + (9-y)(8-y) = 36 \Rightarrow y^2 - 9y + 18 = 0 \Rightarrow y = 3$ или $y = 6$. Оба полученных ответа удовлетворяют условию (в обоих случаях получается записано 36 отрицательных чисел).

3. **(7 баллов)** Четыре кротовые норы A, B, C, D последовательно соединены тремя тоннелями. Каждую минуту крот по тоннелю перебегает в одну из соседних нор. Сколькими способами крот может добраться из норы A в C за 12 минут?

Ответ: 144

Решение: После четного числа минут крот может находиться только в вершинах A и C. Обозначим через a_k и c_k число путей длины $2k$, ведущих из A в A и из A в C соответственно. Заметим, что выполняются равенства $c_{k+1} = a_k + 2c_k$, $a_{k+1} = a_k + c_k$. Отсюда $c_{k+2} = a_{k+1} + 2c_{k+1} = a_k + c_k + 2c_{k+1} = c_{k+1} - 2c_k + c_k + 2c_{k+1} = 3c_{k+1} - c_k$.

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
0	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765	17711	46368	121393	317811	832040

4. **(7 баллов)** Числа a, b, c, d принадлежат отрезку $[-13.5, 13.5]$. Найдите наибольшее значение выражения $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da$.

Ответ: 756

Решение: Заметим, что $a + 2b + c + 2d - ab - bc - cd - da = (a + c) + 2(b + d) - (a + c)(b + d)$. Пусть $x = a + c, y = b + d$, тогда будем искать наибольшее значение выражения $x + 2y - xy = (y - 1)(2 - x) + 2$, где $-28 \leqslant y - 1 \leqslant 26$ и $-25 \leqslant 2 - x \leqslant 29$. Следовательно, $(y - 1)(2 - x) + 2 \leqslant 26 \cdot 29 + 2 = 756$. Наибольшее значение выражения достигается при $a = c = -13.5, b = d = 13.5$.

5. **(8 баллов)** В $\triangle ABC$, $AB = 86$, и $AC = 97$. Окружность с центром в точке A и радиуса AB пересекает сторону BC в точках B и X. К тому же BX и CX имеют целые длины. Чему равна длина BC?

Ответ: 61

Решение: Пусть $x = BX$ и $y = CX$. Посчитаем степень точки C двумя способами

$$y(y + x) = 97^2 - 86^2 = 2013$$

Рассматривая все делители числа 2013 и учитывая неравенство треугольника $\triangle ACX$ получаем единственное решение 61.

6. **(8 баллов)** На доске записано 25 единиц. Каждую минуту Карлсон стирает два произвольных числа и записывает их сумму на доске, а затем съедает количество конфет равное произведению двух стертых чисел. Какое наибольшее количество конфет он мог съесть за 25 минут?

Ответ: 300.

Решение: Изобразим 25 единиц как точки на плоскости. При каждом объединении чисел будем соединять отрезками соответствующие точки одной группы со всеми точками второй группы. Заметим, что если мы заменяем числа x и y на $x+y$, то группы "x" и "y" соединяются xy отрезками. Столько же конфет съедает Карлсон. Через 25 минут все точки будут соединены. Всего будет проведено $\dfrac{25 \cdot (25 - 1)}{2} = 300$ отрезков. Следовательно, Карлсон съест 300 конфет.

7. **(10 баллов)** Натуральные числа a, b, c выбраны таким образом, что $a < b < c$. К тому же известно, что система уравнений $2x + y = 2037$ и $y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ имеет ровно одно решение. Найдите минимальное возможное значение c.

Ответ: 1019

Решение: Функция $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$ является кусочно-линейной функцией. Посмотрим на коэффициент при x на разных участках: если $x < a$, то $k = -3$; если $a < x < b$, то $k = -1$; если $b < x < c$, то $k = 1$; если $c < x$, то $k = 3$.
Наш график $y = -2x + 2037$ имеет коэффициент при x равный -2. Получаем, что решение системы будет единственно только если это будет точка $(a, f(a))$.
Получаем $f(a) = a - a + b - a + c - a = b + c - 2a$, подставляем в первое уравнение и получаем $2a + (b + c - 2a) = 2037$. Следовательно, $b + c = 2037$. А так как $c > b$, то минимальное возможное значение c будет 1019

8. **(10 баллов)** Пусть для положительных чисел x, y, z выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75, \\ y^2 + yz + z^2 = 4, \\ z^2 + xz + x^2 = 79. \end{cases}$$

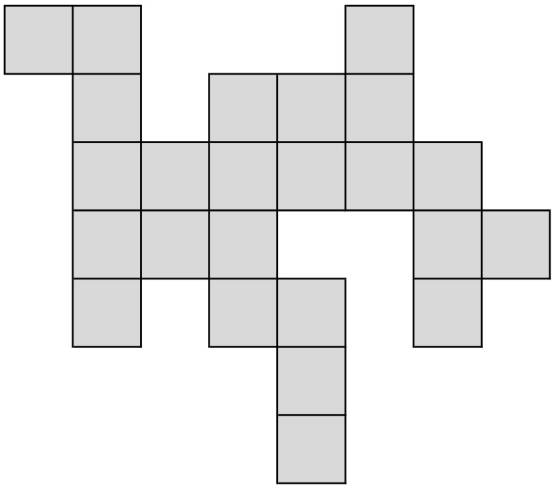
Найдите значение выражения $xy + yz + xz$.

Ответ: 20

Решение: Пусть имеются три луча с вершиной O, образующих углы по 120° друг с другом. На них отложим отрезки $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Тогда по теореме косинусов $AB^2 = 75$, $BC^2 = 4$, $AC^2 = 79$. Заметим, что треугольник ABC прямоугольный с гипотенузой AC. Сумма площадей треугольников AOB, BOC, AOC равна площади треугольника ABC. Что нам дает соотношение $\frac{1}{2}(xy + yz + xz)\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 2$. Откуда получаем ответ.

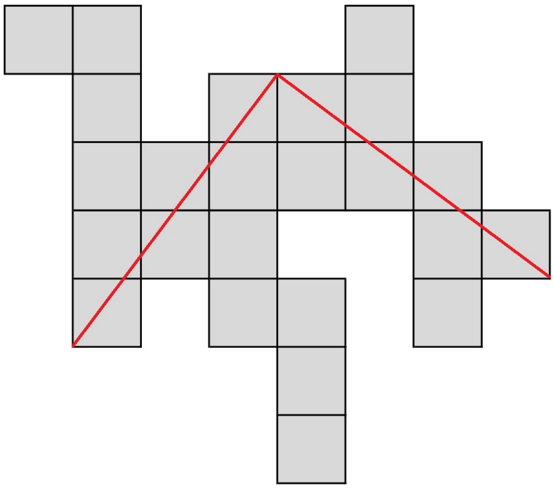
Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Можно ли данную фигуру, нарисованную на клетчатой бумаге, разрезать на три части и составить из них квадрат?



Ответ: Можно.

Решение: Пример разрезания:



10. **(20 баллов)** Пусть x, y, z натуральные числа удовлетворяющие условию $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Докажите, что НОД$(x; y; z) \cdot (y - x)$ – квадрат натурального числа.

Решение: Пусть НОД$(x, y, z) = d$ и $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$, причем НОД$(x_1, y_1, z_1) = 1$. Подставим и получим $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1}$ и нужно доказать, что $d^4(y_1 - x_1)$ – квадрат натурального числа, следовательно достаточно доказать, что $y_1 - x_1$ – квадрат натурального числа.
Приведем к общему знаменателю, прибавим к обеим частям x_1^2 и получим $x_1^2 = (x_1 - y_1)(x_1 - z_1)$. Далее если у чисел $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ есть общий простой множитель p, то $x_1^2 \vdots p$, следовательно $x_1 \vdots p$. Из этого получаем, что $y_1 \vdots p$ и $z_1 \vdots p$, значит они не взаимнопросты в совокупности. Противоречие.
Получаем, что множители $x_1 - y_1$ и $x_1 - z_1$ взаимнопросты, а так как их произведение квадрат, то и каждый множитель – квадрат. Что и требовалось доказать.