Innopolis Open
Олимпиада по математике
Университета Иннополис

10 класс

Задача 1 – стоимость 8 баллов

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$: очевидно, что это уравнение имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$, оба из которых являются целыми. Однако, если произвести перестановку первого и третьего коэффициентов, то получится другое квадратное уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$, корни которого равны $x_2 = -1$, $x_2 = -0.5$, то есть являются вещественными числами.

Существуют ли попарно различные целые числа a, b и c (ни одно из которых не равно нулю), что для всякой их перестановки $p, q, r \in \{a, b, c\}$ уравнение $px^2 + qx + r = 0$ имеет исключительно целочисленные корни? Приведите пример хотя бы одной такой тройки, если такая тройка существует.

Решение

Таких троек чисел a, b и c не существует. Что бы это доказать, предположим противное, что хотя бы одна такая тройка существует. Если уравнение $px^2 + qx + r = 0$ с ненулевыми целочисленными коэффициентами имеет только целочисленные корни, то (по теореме Виета) p делит r. Так как p, q, r – это любая перестановка a, b и c, то на месте p и r оказываются все комбинации пар из a, b и c, и, следовательно, каждое из этих целых чисел делит любое другое, что возможно только если $a, b, c \in \{-1, +1\}$. – Но тогда два из чисел a, b и c обязательно равны, что противоречит тому, что все числа a, b и c попарно различны.

Задача 2 – стоимость 10 баллов

Число 2^{10} в десятичной записи представимо в виде 1024, поэтому длина десятичной записи числа 2^{10} ровно 4 цифры. А какова длина десятичной записи числа 2^{230}?

Решение

Сначала оценим длину десятичной записи 2^{230} снизу. Имеем: $2^{10} = 1024 > 10^3$. Поэтому $2^{230} = (2^{10})^{23} > (10^3)^{23} = 10^{69}$, то есть длина десятичной записи 2^{230} – не менее 70.

Теперь оценим длину десятичной записи 2^{230} сверху. Имеем: $2^{13} = 8192 < 10^4$; поэтому $2^{230} = 2^9 \times 2^{221} = 512 \times (2^{13})^{17} < 512 \times (10^4)^{17} = 512 \times 10^{68}$, то есть длина десятичной записи 2^{230} – не более 71. Но эту оценку можно улучшить: $2^{23} = 8192 \times 1024 = 8388608 < 10^7$; поэтому $2^{230} = (2^{23})^{10} < (10^7)^{10} = 10^{70}$, то есть длина десятичной записи 2^{230} – не более 70.

Задача 3 – стоимость 8 баллов

В неком городе городской совет состоит из 100 депутатов, избираемых (соответственно) в 100 одномандатных избирательных округах. В каждом из избирательных округов зарегистрировано одинаковое число избирателей. Каждый из избирателей является дисциплинированным сторонником одной из трёх партий A, B и C (и голосует только за кандидата в депутаты только от своей партии). От округа избирается тот кандидат, который набрал на выборах не менее 50% голосов избирателей округа. (В случае, если два кандидата в округе набрали по 50% каждый, то они просто тянут жребий.) В целом по городу число сторонников партий A, B и C соответственно 50%, 30% и 20%. Какое максимальное и минимальное число мест в городском совете может получить каждая из партий?

Решение

Важное Наблюдение: так как партия выигрывает (вернее – может выиграть) на избирательном участке, когда у неё 50% поддержка на этом участке, то для каждой партии оптимальная стратегия – иметь как можно больше участков, где её сторонники составляют 50% избирателей.

Пусть n – общее число избирателей в городе. По условию в каждом избирательном участке ровно ${}^{n}/_{100}$ избирателей. Если у партии в целом по городу процент сторонников $p\%$, то число ее сторонников в городе у неё $\frac{pn}{100}$; если k – максимальное число избирательных участков, в которых может победить эта партия, то $\frac{pn}{100k} = 0.5 \times \frac{n}{100}$ откуда получаем $k = 2p$.

Так как по условию задачи у партии A – ровно 50% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_A = 2 \times 50 = 100$; поэтому партия A может получить все 100 мест городского собрания, и, следовательно, партии B и C могут не получить ни одного места в городском собрании.

Так как по условию задачи у партии B – ровно 30% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 30 = 60$; поэтому партия B может получить 60 мест городского собрания.

Так как по условию задачи у партии C – ровно 20% сторонников по городу в целом, то максимальное число участков, на которых она могла бы победить $k_B = 2 \times 20 = 40$; поэтому партия B может получить 40 мест городского собрания.

Следовательно, при координации партий B и C партия A может не получить ни одного места в городском собрании.

Партия	A	B	C
Максимум мест	100	60	40
Минимум мест	0	0	0

Задача 4 – стоимость 10 баллов

Даны три отрезка L_1, L_2 и L_3. Опишите, как с помощью циркуля и линейки построить такой отрезок L, что длины отрезков L и L_1относятся так, как объемы кубов со сторонами L_2 и L_3 соответственно.

Решение

Важное Замечание: для любых трёх отрезков A, B, и C с помощью циркуля и линейки можно построить такой отрезок D такой, что ${}^{D}/_{A} = {}^{B}/_{C}$.

Нам надо описать алгоритм построения (с циркулем и линейкой) такого отрезка L, что ${}^{L}/_{L_1} = {}^{L_2^3}/_{L_3^3}$, то есть такой, что $L = \frac{L_1 L_2^3}{L_3^2} = \left(\left(L_1 \times \frac{L_2}{L_3}\right) \times \frac{L_2}{L_3}\right) \times \frac{L_2}{L_3}$. Поэтому алгоритм построения отрезка L следующий:

1. построить такой отрезок X, что $\frac{X}{L_1} = \frac{L_2}{L_3}$;
2. построить такой отрезок Y, что $\frac{Y}{X} = \frac{L_2}{L_3}$;
3. построить такой отрезок Z, что $\frac{Z}{Y} = \frac{L_2}{L_3}$;

тогда Z – это и есть искомый отрезок L. (В силу Важного Замечания, все построения возможны с помощью циркуля и линейки.)

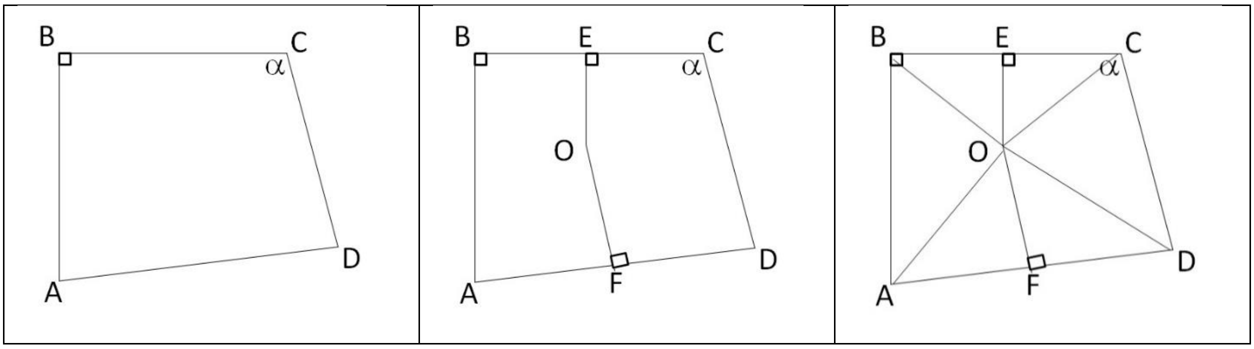
Задача 5 – стоимость 14 баллов

Прочитайте следующую «теорему» с «доказательством». Где ошибка? Исправьте формулировку теоремы и/или доказательство так, чтобы получилось истинное утверждение и корректное доказательство.

Теорема: Всякий тупой угол является прямым.

Доказательство:

Пусть α - произвольный тупой угол; построим четырехугольник $ABCD$ (см. рис. 1), в котором $|AB| = |BC| = |CD|$, $\angle ABC$ – прямой, а $\angle BCD = \alpha$. Построим срединные перпендикуляры EO и FO к сторонам BC и A, где O – точка пересечения этих перпендикуляров (см. рис. 2). Соединим точку O с вершинами A, B, C и D (см. рис. 3). По построению: $\Delta OBE = \Delta OCE$, $\angle OBE = \angle OCE$ и $|OB| = |OC|$; также по построению: $\Delta OAF = \Delta ODF$ и $|OA| = |OD|$. В силу равенства трёх сторон $\Delta OBA = \Delta OCD$ и, следовательно, $\angle OBA = \angle OCD$. Поэтому $\angle ABC = \angle OBA + \angle OBE = \angle OCD + \angle OCE = \alpha$, то есть прямой угол $\angle ABC$ равен тупому углу α. Теорема доказана.



Решение

На самом деле мы доказываем (методом от противного), что *в построенном четырёхугольнике серединные перпендикуляры к сторонам BC и AD имеют точку пересечения вне четырёхугольника*. – Действительно, в противном случае мы приходим к выводу (см. «доказательство»), что тупой угол равен прямому.