ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

9 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Сто человек ответили на вопрос: «Будет ли новый президент лучше прежнего?» Из них a человек считают, что будет лучше, b — что будет такой же и c — что будет хуже. Других ответов не было. Социологи построили два показателя «оптимизма» опрошенных: $m = a + b/2$, $n = a - c$. Оказалось, что $m = 40$. Чему равняется в этом случае n?

2. **(5 баллов)** Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{10^2} + 10^{10^3} + \ldots + 10^{10^{11}}$ на 7.

3. **(7 баллов)** За круглым столом сидят 15 человек. Разрешается любых двоих людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее количество таких перестановок надо сделать, чтобы в результате любые два соседа остались соседями, но сидели в обратном порядке?

4. **(7 баллов)** Равносторонний треугольник поворачивают относительно центра на 3°, потом на 9°, на 27°, и т.д. (на n-м шаге его поворачивают на $(3^n)^\circ$). Сколько всего разных положений будет занимать треугольник в ходе этой деятельности (включая начальное)?

5. **(8 баллов)** Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

6. **(8 баллов)** В квадрате $ABCD$ со стороной 12 диагональ BD пересекает отрезки CM и CK в точках N и L соответственно (M и K – середины сторон AB и AD соответственно). Чему равна площадь четырехугольника $MNLK$?

7. **(10 баллов)** Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{624}$, где $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

8. **(10 баллов)** Каждое положительное рациональное число встречается в бесконечном количестве позиций в следующей последовательности:
$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$
Найдите номер позиции, в котором число $\dfrac{1}{2}$ встречается 10-ый раз.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Окружность с центром в середине основания BC касается боковых сторон равнобедренного треугольника ABC. Касательная к этой окружности пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что
$$BP \cdot CQ = \frac{BC^2}{4}.$$

10. **(20 баллов)** Даны различные натуральные числа a, b, c, d, для которых выполняются следующие условия: $a > d$, $ab = cd$ и $a + b + c + d = ac$. Найдите сумму всех четырёх чисел.