

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

11 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Игральный кубик бросали 5 раз. Найдите вероятность того, что среди выпавших очков найдутся два одинаковых. Ответ округлите до сотых.
2. **(5 баллов)** Найдите $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, где x_1, x_2 и x_3 корни уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 10x - 10 = 0.$$
3. **(7 баллов)** Решите уравнение $16^{x^2+y} + 16^{y^2+x} = 1$. В ответ запишите значение переменной x .
4. **(7 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n} - 1$ делится на 2^{11} .
5. **(8 баллов)** Найдите количество способов выбрать 5 чисел из множества $\{1, 2, \dots, 10\}$ так, чтобы среди выбранных не было трех последовательных чисел.
6. **(8 баллов)** Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = 17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD = 7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF .
7. **(10 баллов)** На мероприятие в Иннополисе приехали n школьников. Оказалось, что у любых двух незнакомых между собой школьников среди участников мероприятия имеется ровно два общих знакомых, а у любых двух знакомых нет общих знакомых. Найдите наименьшее возможное n , если известно дополнительно, что количество школьников больше дюжины.
8. **(10 баллов)** В правильной четырехугольной усеченной пирамиде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение ABC_1D_1 . Найдите отношение объемов полученных многогранников $\frac{V_{ABCDD_1C_1}}{V_{A_1B_1C_1D_1AB}}$, если $AB : A_1B_1 = 3$. Ответ округлите до сотых.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** M и N середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ соответственно. Через точки M и N проведено сечение, пересекающее ребра AC и BD в точках P и Q соответственно. Докажите, что

$$AP : AC = BQ : BD.$$

10. **(20 баллов)** Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 8(x+7)^4 + (y-4)^4 = c, \\ (x+4)^4 + 8(y-7)^4 = c. \end{cases}$$