

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

10 класс, вариант 1.

1. (5 баллов) Число  $n$  называется дублем, если его запись в семеричной системе счисления, будучи прочитана как десятичное число, равна  $2n$ . Например,  $51 = 102_7$ . Найдите наибольший дубль.
2. (5 баллов) При каком  $a$  многочлены  $x^4 + ax^2 + 7$  и  $x^3 + ax + 7$  имеют общий корень?
3. (7 баллов) На координатной плоскости нарисован многоугольник, координаты вершин которого натуральные числа. Для каждой вершины с координатами  $(x; y)$  выполняются условия:  $(2x + 1) : y$  и  $(2y + 1) : x$ . Какую максимальную площадь может иметь этот многоугольник?
4. (7 баллов) В полном графе на 10 вершинах удалили один цикл длины три. Сколько циклов длины три осталось?
5. (8 баллов) Пусть  $l$  — биссектриса внешнего угла  $C$  треугольника  $ABC$ . Прямая, параллельная  $l$  и проходящая через середину  $K$  стороны  $AB$ , пересекает  $AC$  в точке  $E$ . Найдите  $CE$ , если  $AC = 7$  и  $CB = 4$ .
6. (8 баллов) Обозначим через  $k(N)$  наибольший нечетный делитель числа  $N$ . Найдите сумму  
$$k(1010) + k(1011) + \dots + k(2018).$$
7. (10 баллов) В правильном 19-угольнике наугад выбирают две тройки различных вершин. Какова вероятность того, что два треугольника, с вершинами в выбранных тройках, не пересекаются?
8. (10 баллов) Треугольник расположен на клетчатой плоскости так, что все его вершины находятся в узлах. Две его стороны равны  $\sqrt{41}$  и  $\sqrt{85}$ . Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник? (Сторона клетки равна 1)

*Следующие задачи решите с обоснованием ответа*

9. (20 баллов) На сторонах треугольника  $ABC$ , как на основаниях, построены подобные равнобедренные треугольники  $APB$ ,  $AQC$  и  $BRC$ . Треугольники  $APB$  и  $AQC$  построены во внешнюю сторону, а треугольник  $BRC$  — по ту же сторону от  $BC$ , что и треугольник  $ABC$ . Докажите, что четырехугольник  $PAQR$  является параллелограммом.
10. (20 баллов) На сколько нулей заканчивается число  $4^{56} + 6^{54}$  в десятичной записи?