

ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

10 класс, вариант 1.

1. (5 баллов) На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1000. Вася стер все числа кратные 2, потом последовательно все кратные 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Из оставшихся чисел Вася выбрал все составные и нашел их сумму. Что за число получилось?
2. (5 баллов) Найдите количество десятизначных натуральных чисел, кратных трем, и в десятичной записи которых встречаются только цифры 5 или 6.
3. (7 баллов) Найдите наименьшее значение a такое, что среди действительных корней уравнения $x^3 - 19x + a = 0$ имеется два с разностью 1.
4. (7 баллов) Ставка называется честной, если математическое ожидание выигрыша равна нулю. Например, если ставка 3 : 5, то при проигрыше вы теряете свои 3, а при выигрыше получаете 5 от оппонента (ваша ставка возвращается), но при большом количестве честных ставок никто не выигрывает и не проигрывает. Честный букмекер принимает только честные ставки. В забеге участвуют три лошади: Альфа, Бета и Гамма. Честный букмекер принимает ставки 2 : 1 на то, что лошадь Альфа выиграет забег, и 3 : 7 что Бета будет первой. Динар поставил 1000 рублей у этого букмекера на то, что лошадь Гамма выиграет забег. Сколько он получит в случае выигрыша (кроме своих денег)?
5. (8 баллов) Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = 17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD = 7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF .
6. (8 баллов) Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n} - 1$ делится на 2^{11} .
7. (10 баллов) Найдите сумму

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 217^3.$$
8. (10 баллов) В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D , а на стороне AB — точка K так, что $AK : KB = 3 : 2$ и $CD : DB = 1 : 5$. Отрезки AD и CK пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей $\frac{S_{\triangle AOK}}{S_{\triangle ABC}}$. Ответ округлите до сотых.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. (20 баллов) В треугольнике ABC проведена высота AD . Окружность касается BC в точке D , пересекает сторону AB в точках M и N , а сторону AC — в точках P и Q . Докажите, что

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB}.$$
10. (20 баллов) Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 2(x+7)^2 + (y-4)^2 = c, \\ (x+4)^2 + 2(y-7)^2 = c. \end{cases}$$