ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

Ответы и решения

9 класс, вариант 1.

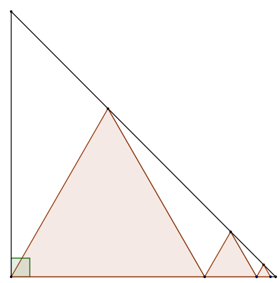
1. (**5 баллов**) Найдите количество трехзначных натуральных чисел таких, что если из него вычесть трехзначное число, записанное теми же цифрами но в обратном порядке, то получится 297.
Ответ: 60.

2. (**5 баллов**) Найдите $x_1^6 + x_2^6$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 9x + 3 = 0$.
Ответ: 419850.

3. (**7 баллов**) Таблица 13×13 заполнена числами, причем сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равна 2017. Какое наименьшее количество чисел необходимо изменить в таблице для того, чтобы все 26 сумм по строкам и столбцам стали различными?
Ответ: 17.

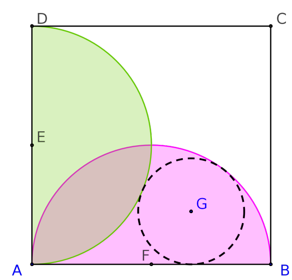
4. (**7 баллов**) Ставка называется честной, если математическое ожидание выигрыша равна нулю. Например, если ставка $3 : 5$, то при проигрыше вы теряете свои 3, а при выигрыше получаете 5 от оппонента (ваша ставка возвращается), но при большом количестве честных ставок никто не выигрывает и не проигрывает. Честный букмекер принимает только честные ставки. В забеге участвуют три лошади: Альфа, Бета и Гамма. Честный букмекер принимает ставки $2 : 1$ на то, что лошадь Альфа выиграет забег, и $3 : 7$ что Бета будет первой. Динар поставил 1000 рублей у этого букмекера на то, что лошадь Гамма выиграет забег. Сколько он получит в случае выигрыша (кроме своих денег)?
Ответ: 29000.

5. (**8 баллов**) Дан равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 10. В него вписаны бесконечное количество правильных треугольников, как показано на рисунке: вершины лежат на гипотенузе, а основания последовательно откладываются на одном из катетов начиная из вершины прямого угла. Найдите сумму площадей правильных треугольников.
Ответ: 25.



6. (**8 баллов**) Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{215}.
Ответ: 211.

7. (**10 баллов**) На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ с длиной стороны 108 построены полуокружности во внутреннюю сторону. Найдите радиус окружности, которая касается стороны квадрата и полуокружностей: одной внешне, другой внутренне.
Ответ: 24.



8. (**10 баллов**) В группе 9 студентов. Они решили создать клубы так, что каждый клуб состоит из трех студентов группы и любые два клуба имеют не более одного общего члена. Какое максимальное количество клубов они могут создать?
Ответ: 12

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка M. Прямые AM, BM, CM пересекают стороны треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $MA_1 = MB_1 = MC_1 = 3$ и $AM + BM + CM = 43$. Найдите $AM \cdot BM \cdot CM$.

Ответ: 441.

Решение. Пусть $AM = x$, $BM = y$, $CM = z$. Заметим, что $\dfrac{MC_1}{CC_1} = \dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}}$ и аналогично для двух других отрезков. Из равенства $\dfrac{S_{AMB}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{BMC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = 1$ следует $\dfrac{3}{x+3} + \dfrac{3}{y+3} + \dfrac{3}{z+3} = 1$, которая преобразуется в $xyz = 2 \cdot 3^3 + 3^2(x+y+z) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 \cdot 43$

10. **(20 баллов)** Найдите все значения параметра c такие, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} 2|x+7| + |y-4| = c, \\ |x+4| + 2|y-7| = c. \end{cases}$$

Ответ: $c = 3$.

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — единственное решение системы. Тогда $(-y_0; -x_0)$ тоже удовлетворяет условиям системы. Это решение совпадает с первой, поэтому $y_0 = -x_0$. Уравнение $2|x+7| + |x+4| = c$ имеет единственное решение $x_0 = -7$ при $c = |7-4|$, так как функция $f(x) = 2|x+7| + |x+4|$ убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$. Аналогично $2|y-7| + |y-4| \geqslant |7-4|$. Поэтому при $c = |7-4|$ равенство $f(x) + f(-y) = 2c$ выполняется только при $x = -y = -7$, т.е. система имеет единственное решение.