Условия и решения задач
9 класс

1. В таблице 4×4 расставлены 16 различных натуральных чисел. Для каждой строки и каждого столбца таблицы нашли наибольший общий делитель расположенных в нем чисел. Оказалось, что все найденные восемь чисел различны. Для какого наибольшего n можно утверждать, что в такой таблице найдется число, не меньшее n? *(А. Храбров)*

Ответ: 32.

Решение. Если в каком-то ряду наибольший общий делитель равен n, то в нем есть четыре числа, делящихся на n, а, значит, число, не меньшее, чем $4n$. Поскольку наибольшие общие делители во всех рядах различны, один из них заведомо не меньше 8. Тогда в соответствующем ему ряду должно быть число, не меньшее 32. Приведем теперь пример таблицы, в которой все числа не больше 32. Наибольшие общие делители по строкам равны 5, 6, 7 и 8, а по столбцам равны 1, 2, 3 и 4.

5	10	15	20
30	6	18	12
7	14	21	28
8	16	24	32

Замечание. Наибольшие общие делители заведомо должны быть числами от 1 до 8, а ряды с НОДами 6, 7 и 8 должны быть составлены из тех чисел, которые стоят в соответствующих рядах в таблице из примера (возможно в другом порядке). ■

2. Для положительных чисел a, b, c и d докажите неравенство

$$a+b+c+d+\frac{8}{ab+bc+cd+da} \geqslant 6.$$

(А. Храбров)

Первое решение. Положим $x = a+b+c+d$ и $y^2 = ab+bc+cd+da$. Поскольку

$$x^2 = \big((a+c)+(b+d)\big)^2 \geqslant 4(a+c)(b+d) = 4y^2,$$

имеем неравенство $x \geqslant 2y$. Запишем доказываемое неравенство в новых обозначениях: $x + \frac{8}{y^2} \geqslant 6$. Достаточно проверить, что

$$2y + \frac{8}{y^2} \geqslant 6.$$

После сокращения на 2 и приведения к общему знаменателю получится неравенство $y^3 - 3y^2 + 4 = (y+1)(y-2)^2 \geqslant 0$. Последнее очевидно, поскольку $y > 0$.

Второе решение. По неравенству Коши для трех положительных чисел:

$$(a+c) + (b+d) + \frac{8}{(a+c)(b+d)} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a+c)\cdot(b+d)\cdot 8}{(a+c)(b+d)}} = 6.$$

■

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 6\sqrt{3-2x} - y + 11 = 0, \\ y^2 - 4\sqrt{3y-2} + 4x + 16 = 0. \end{cases}$$

(*Р. Алишев*)

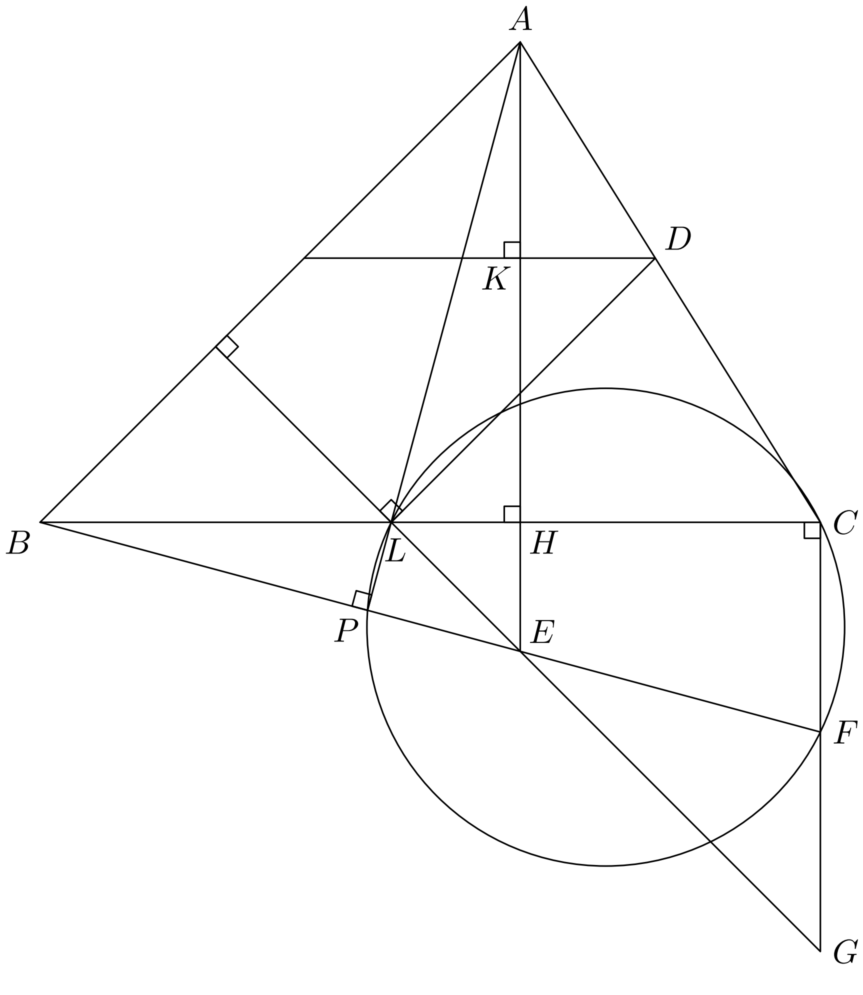
Ответ: $x = -3$, $y = 2$.

Решение. Сложим эти уравнения и соберем полные квадраты: $x^2 + 4x - 6\sqrt{3-2x} + y^2 - y - 4\sqrt{3y-2} + 27 = x^2 + 6x + 9 + 3 - 2x - 6\sqrt{3-2x} + 9 + y^2 - 4y + 4 + 3y - 2 - 4\sqrt{3y-2} + 4 = (x+3)^2 + (\sqrt{3-2x} - 3)^2 + (y-2)^2 + (\sqrt{3y-2} - 2)^2 = 0$. Очевидно, что только при $x = -3$ и $y = 2$ квадраты принимают свои наименьшие значения, равные нулю. Подстановкой найденных значений переменных в исходную систему убеждаемся, что они удовлетворяют обоим равенствам. ■

4. На высоте AH остроугольного треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне BC отмечена точка L. Оказалось, что $\frac{AK}{HK} = \frac{BL}{CL}$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AL. Докажите, что прямая KL касается описанной окружности треугольника CLP.

(*М. Стынян*)

Первое решение. Через точку K проведем прямую, параллельную стороне BC. Обозначим через D точку её пересечения со стороной AC. Тогда по теореме Фалеса $\frac{AD}{DC} = \frac{AK}{KH} = \frac{BL}{LC}$. Следовательно, прямые DL и AB параллельны. Поэтому треугольники ABC и DLC подобны и, значит, $\frac{AB}{DL} = \frac{BC}{LC}$ и $\frac{BC}{BL} = \frac{AC}{AD}$.



Пусть точка L лежит между точками B и H. Обозначим через E точку пересечения прямых AH и BP. Тогда в треугольнике ABE прямые AH и BP являются высотами. Значит, точка L является ортоцентром треугольника ABE.

Поэтому прямая EL также является высотой и, значит, EL перпендикулярно прямым AB и DL. Через точку C проведем прямую, параллельную AH, точки её пересечения с прямыми BE и LE через F и G соответственно.

Поскольку L — ортоцентр треугольника ABE, $\angle ABH = \angle AEL = \angle FGE$. Аналогично, $\angle BAL = \angle BEL = \angle FEG$. Стало быть, треугольники ALB и EFG подобны по двум углам.

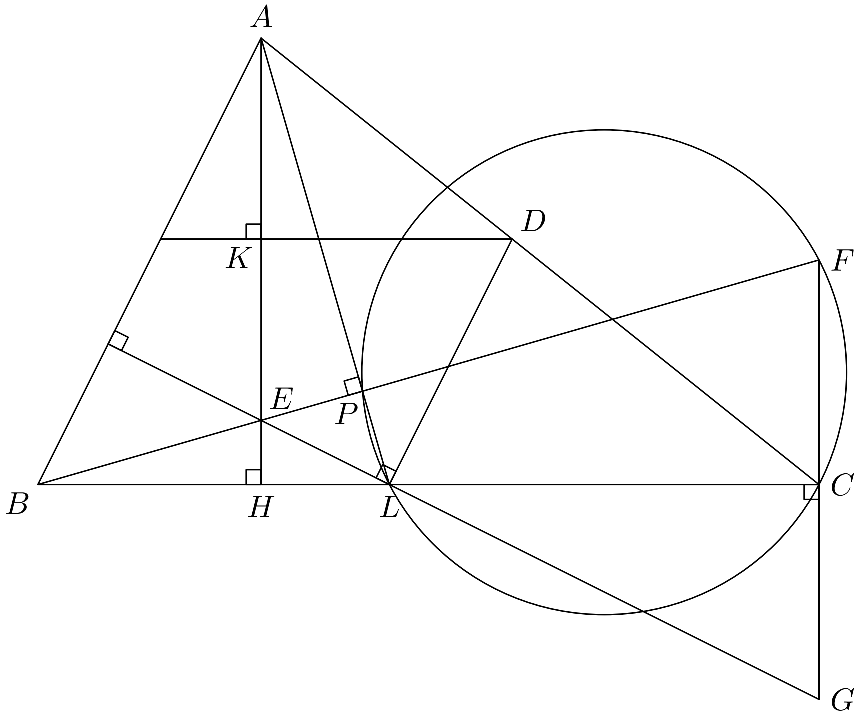
Значит, $\frac{EG}{FG} = \frac{AB}{LB}$. По теореме Фалеса для прямых AE и CG имеем $\frac{LG}{EG} = \frac{LC}{HC}$. Отметим также, что из параллельности прямых KD и HC следует равенство $\frac{HC}{KD} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BL}$. Соберем все полученные отношения вместе:

$$\begin{aligned}\frac{LG}{FG} &= \frac{LG}{EG}\cdot\frac{EG}{FG} = \frac{LC}{HC}\cdot\frac{AB}{LB} = \frac{LC}{HC}\cdot\frac{AB}{LD}\cdot\frac{LD}{BL}\\ &= \frac{LC}{HC}\cdot\frac{BC}{LC}\cdot\frac{LD}{BL} = \frac{BC}{HC}\cdot\frac{LD}{BL} = \frac{HC}{HC}\cdot\frac{LD}{KD} = \frac{LD}{KD}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что треугольники LGF и LDK подобны ($\angle FGE = \angle ABH = \angle LDK$, последнее равенство следует из того, что $KD \parallel BL$ и $DL \parallel AB$). Тогда $\angle GLF = \angle DLK$ и, значит, угол между прямыми KL и LF равен углу между прямыми LD и LG, таким образом, прямые KL и LF перпендикулярны.

Осталось заметить, что поскольку $\angle LCF = \angle LPF = 90^\circ$, четырехугольник $CLPF$ является описанным и отрезок LF является диаметром окружности, описанной вокруг него. Тогда отрезок LF является и диаметром описанной окружности треугольника CLP, а поскольку он перпендикулярен прямой KL, она является касательной к этой окружности.

Если точка L лежит между точками C и H, то вычисление углов для проверки подобия треугольников ALB и EFG немного изменится. А именно, в треугольнике ABL прямые AH и BP являются высотами. Значит, точка E является ортоцентром треугольника ABL. Тогда $\angle ABL = \angle LEH = \angle FGE$ и $\angle BAL = \angle FEG$.



Второе решение. Пусть прямая BP пересекает описанную окружность треугольника CLP в точке F. Равенство углов $\angle LAH = \angle LBP$ очевидно. Отсюда вытекает подобие треугольников $\triangle ALH \sim \triangle BFC$. Рассмотрим поворотную гомотетию с коэффициентом $\frac{BC}{AH}$ и углом 90°, переводящую $\triangle ALH$ в $\triangle BFC$. Эта гомотетия точку K переведет в точку L, а точку L — в точку F. Поэтому прямые KL и BL перпендикулярны, так как переходят друг в друга. FL является диаметром окружности, а KL перпендикуляр, следовательно, касательная.

Третье решение. Достаточно доказать, что KL образует с секущей AL угол, равный $\angle LCP$. Равенство углов $\angle LAH = \angle LBP$ очевидно. Высоты треугольника ABL обратно пропорциональны сторонам: $\frac{AL}{BL} = \frac{AH}{BP}$. Откуда нехитрыми преобразованиями получаем

$$\frac{AL}{BC} = \frac{BL}{BC} \cdot \frac{AH}{BP} = \frac{AK}{AH} \cdot \frac{AH}{BP} = \frac{AK}{BP}.$$

Тогда треугольники AKL и BPC подобны по второму признаку. Их соответствующие углы ALK и BCP равны, чего и требовалось. ■

5. Два разбойника делят добычу, состоящую из монет достоинством в нечетное число тугриков от 1 до 2017. Известно, что в сумме у них четное число тугриков и для любого нечетного k, не превосходящего 2017, в их добыче есть монета достоинством в k тугриков. Докажите, что разбойники смогут поровну разделить добычу.

(*А. Храбров по мотивам задачи В. Франка*)

Решение. Пусть разбойники делят сумму в $2n$ монет. Предположим, что они не могут поделить их поровну. Выдадим первому разбойнику наибольшую возможную сумму s, которая меньше n. Тогда он получит монет на сумму в $s \leqslant n-1$ тугриков. Остальные монеты отдадим второму. Если бы у второго оказалась монета в один тугрик, то, передав ее первому, он смог бы увеличить сумму первого на 1 и в итоге у первого бы оказалось $s + 1 \leqslant n$ монет. Это противоречит тому, что у первого наибольшая возможная сумма, меньшая n. Значит, все монеты в один тугрик достались первому. Рассмотрим теперь наименьшую по достоинству монету, которая досталась второму. Пусть это m ($m > 3$) тугриков. Тогда монета в $m - 2$ тугрика досталась первому. Если мы поменяем монеты в 1 и $m-2$ тугрика, которые есть у первого, на монету в m тугриков, которая есть у второго, то мы увеличим сумму у первого на 1 тугрик. Но это снова противоречит тому, что у первого наибольшая возможная сумма, меньшая n. Значит, исходное предположение неверно и монеты можно поделить поровну. Осталось разобрать случай $m = 3$. Предыдущий алгоритм не работает в случае, когда монеты 1 тугрик и $m - 2$ тугрик одна и та же. Причем у первого сумма всех монет $n-1$ тугрик, а у втрого — $n+1$. Тогда обязательно существуют монеты достонинствами у первого $2k-1$, у второго $2k+1$ тугрик, которые можно обменять так, чтобы у первого сумма выросла на 1. ■