ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

II отборочный (заочный) этап по математике, 16 декабря 2017г.

10 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** Число n называется дублем, если его запись в семеричной системе счисления, будучи прочитана как десятичное число, равна $2n$. Например, $51 = 102_7$. Найдите наибольший дубль.

Ответ: 315

2. **(5 баллов)** При каком a многочлены $x^4 + ax^2 + 7$ и $x^3 + ax + 7$ имеют общий корень?
Ответ: -8.

3. **(7 баллов)** На координатной плоскости нарисован многоугольник, координаты вершин которого натуральные числа. Для каждой вершины с координатами $(x; y)$ выполняются условия: $(2x + 1) \vdots y$ и $(2y + 1) \vdots x$. Какую максимальную площадь может иметь этот многоугольник?

Ответ: 20

4. **(7 баллов)** В полном графе на 10 вершинах удалили один цикл длины три. Сколько циклов длины три осталось?
Ответ: 98

5. **(8 баллов)** Пусть l — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC. Прямая, параллельная l и проходящая через середину K стороны AB, пересекает AC в точке E. Найти CE, если $AC = 7$ и $CB = 4$.
Ответ: 5.5

6. **(8 баллов)** Обозначим через $k(N)$ наибольший нечетный делитель числа N. Найдите сумму

$$k(1010) + k(1011) + \ldots + k(2018).$$

Ответ: 1018081

7. **(10 баллов)** В правильном 19-угольнике наугад выбирают две тройки различных вершин. Какова вероятность того, что два треугольника, с вершинами в выбранных тройках, не пересекаются?

Ответ: $0,3$

8. **(10 баллов)** Треугольник расположен на клетчатой плоскости так, что все его вершины находятся в узлах. Две его стороны равны $\sqrt{41}$ и $\sqrt{85}$. Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник? (Сторона клетки равна 1)

Ответ: $29,5$

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** На сторонах треугольника ABC, как на основаниях, построены подобные равнобедренные треугольники APB, AQC и BRC. Треугольники APB и AQC построены во внешнюю сторону, а треугольник BRC — по ту же сторону от BC, что и треугольник ABC. Докажите, что четырехугольник $PAQR$ является параллелограммом.

Решение. Покажем, что $AQ \parallel PR$. Рассмотрим треугольники BPR и BAC. Заметим, что $\angle PBR = \angle ABC$, а также $BP/BR = AB/BC$, из подобия треугольников PAB и RCB. Следовательно, треугольники BPR и BAC подобны и, более того, одинаково ориентированы. Тогда $\angle(AC, PR) = \angle(BA, BP) = \angle(AC, AQ)$ (везде в равенствах подразумеваются равенства углов между прямыми). Значит, $PR \parallel AQ$. Аналогично, $QR \parallel AP$, то есть $PAQR$ — параллелограмм, что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** На сколько нулей заканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$ в десятичной записи?

Ответ: 5

Решение. Рассмотрим число $4^{25} + 6$. Проверим, что оно делится на 5 и не делится на 25. Имеем

$$4^{25} + 6 \equiv (-1)^{25} + 6 \equiv 0 \pmod 5;$$
$$4^{25} \equiv 1024^5 + 6 \equiv (-1)^5 + 6 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Будем писать $5^t \mid\mid c$, если $5^t \mid c$, $5^{t+1} \nmid c$. Для произвольных целых a, b, не кратных 5, таких, что $5^k \mid\mid a - b$, $k > 0$, докажем, что $5^{k+1} \mid\mid a^5 - b^5$.

Положим $a - b = s$, $5^k \mid\mid s$. Имеем

$$a^5 - b^5 = s\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right) =$$
$$= s\left((b+s)^4 + (b+s)^3b + (b+s)^2b^2 + (b+s)b^3 + b^4\right).$$

Раскроем скобки по биному Ньютона и рассмотрим выражение $\left((b+s)^4 + (b+s)^3b + (b+s)^2b^2 + (b+s)b^3 + b^4\right)$ по модулю 25. Ясно, что от каждой скобки остаются лишь слагаемые, в которых s возводится в степень не более 1. Итак, имеем

$$(b+s)^4 + (b+s)^3b + (b+s)^2b^2 + (b+s)b^3 + b^4 \equiv$$
$$\equiv 5b^4 + (4+3+2+1)b^3s \equiv$$
$$\equiv 5b^4 + 10b^3s \equiv 5b^4 \pmod{25}.$$

Таким образом,

$$5^1 \mid\mid \left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right).$$

Значит, $5^{k+1} \mid\mid a^5 - b^5$.

Итак, перейдём к решению задачи. Имеем

$$4^{5^6} + 6^{5^4} = (1025^5)^{5^4} - (-6)^{5^4}.$$

Положим $a = 1025^5$, $b = -6$. Применим доказанное нами утверждение. Получаем, что

$$5^2 \mid\mid (1025^5)^5 - (-6)^5.$$

Применив утверждение ещё 3 раза, получим, что

$$5^5 \mid\mid (1025^5)^{5^4} - (-6)^{5^4}.$$

Осталось заметить, что число из условия кратно 2^5. Итак, число заканчивается ровно на 5 нулей.

Замечание. Если воспользоваться Леммой Гензеля, то решение становится очевидным. Но доказательство леммы сложнее, чем решить эту задачу.