ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИННОПОЛИС

I отборочный (заочный) этап по математике, 3 декабря 2017г.

Ответы и решения

10 класс, вариант 1.

1. **(5 баллов)** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1000. Вася стер все числа кратные 2, потом последовательно все кратные 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Из оставшихся чисел Вася выбрал все составные и нашел их сумму. Что за число получилось?

Ответ: 7393

2. **(5 баллов)** Найдите количество десятизначных натуральных чисел, кратных трем, и в десятичной записи которых встречаются только цифры 5 или 6.

Ответ: 341

3. **(7 баллов)** Найдите наименьшее значение a такое, что среди действительных корней уравнения $x^3 - 19x + a = 0$ имеется два с разностью 1.

Ответ: -30.

4. **(7 баллов)** Ставка называется честной, если математическое ожидание выигрыша равна нулю. Например, если ставка $3:5$, то при проигрыше вы теряете свои 3, а при выигрыше получаете 5 от оппонента (ваша ставка возвращается), но при большом количестве честных ставок никто не выигрывает и не проигрывает. Честный букмекер принимает только честные ставки. В забеге участвуют три лошади: Альфа, Бета и Гамма. Честный букмекер принимает ставки $2:1$ на то, что лошадь Альфа выиграет забег, и $3:7$ что Бета будет первой. Динар поставил 1000 рублей у этого букмекера на то, что лошадь Гамма выиграет забег. Сколько он получит в случае выигрыша (кроме своих денег)?

Ответ: 29000.

5. **(8 баллов)** Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = 17$. На стороне AC отмечена точка D так, что $CD = 7$. Впишите в треугольник ABC треугольник DEF наименьшего периметра (E лежит на стороне AB и F — на BC). В ответ напишите периметр треугольника DEF.

Ответ: 26

6. **(8 баллов)** Найдите наименьшее натуральное значение n такое, что число $3^{2n} - 1$ делится на 2^{11}.

Ответ: 256.

7. **(10 баллов)** Найдите сумму

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 217^3.$$

Ответ: 282304441.

8. **(10 баллов)** В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D, а на стороне AB — точка K так, что $AK : KB = 3 : 2$ и $CD : DB = 1 : 5$. Отрезки AD и CK пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей $\dfrac{S_{\triangle AOK}}{S_{\triangle ABC}}$. Ответ округлите до сотых.

Ответ: 0.45.

Следующие задачи решите с обоснованием ответа

9. **(20 баллов)** В треугольнике ABC проведена высота AD. Окружность касается BC в точке D, пересекает сторону AB в точках M и N, а сторону AC — в точках P и Q. Докажите, что

$$\frac{AM+AN}{AC}=\frac{AP+AQ}{AB}.$$

Решение. Обозначим за O центр окружности из условия задачи. Тогда O лежит на AD. Из точки O опустим перпендикуляры OE и OF на стороны AB и AC соответственно. Тогда точки E и F являются серединами отрезков MN и PQ соответственно, а значит $AE=\frac{1}{2}(AM+AN)$ и $AF=\frac{1}{2}(AP+AQ)$. $\angle OEB=\angle ODC=\angle OFA=90^\circ$, следовательно четырёхугольники $BEOD$ и $CDOF$ вписанные. Пусть S_1 и S_2 — их описанные окружности. Далее заметим, что точка A лежит на радикальной оси окружностей S_1 и S_2, то есть её степень относительно S_1 равна её степени относительно S_2. Таким образом, $AE\cdot AB=AF\cdot AC$, то есть $AB(AM+AN)=AC(AP+AQ)$, что и требовалось доказать.

10. **(20 баллов)** Найдите наименьшее значение параметра c такое, что система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases}2(x+7)^2+(y-4)^2=c,\\(x+4)^2+2(y-7)^2=c.\end{cases}$$

Ответ: $c=6.0$.

Решение. По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем

$$(1)\qquad \left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2(x+\alpha)^2+(y-\beta)^2\right)\geqslant\left(|x+\alpha|+|y-\beta|\right)^2,$$

$$(2)\qquad \left(1+\frac{1}{2}\right)\left((x+\beta)^2+2(y-\alpha)^2\right)\geqslant\left(|x+\beta|+|y-\alpha|\right)^2.$$

А значит, для любого решения (x,y) системы выполнено

$$(3)\qquad 3c\geqslant\left(|x+\alpha|+|y-\beta|\right)^2+\left(|x+\beta|+|y-\alpha|\right)^2\geqslant$$
$$\geqslant(\alpha-\beta+x+y)^2+(\alpha-\beta-(x+y))^2=$$
$$=2(\alpha-\beta)^2+2(x+y)^2\geqslant2(\alpha-\beta)^2.$$

Следовательно, при $c<\frac{2}{3}(\alpha-\beta)^2$ решений у системы нет.
Ежели $c=\frac{2}{3}(\alpha-\beta)^2$, то во всех неравенствах (1)-(3) должно достигаться равенство. Следовательно $x+y=0$, числа $x+\alpha$ и $x+\beta$ должны быть разных знаков, а также

$$\frac{2(x+\alpha)^2}{(x+\beta)^2}=\frac{1}{2}.$$

Из этих условий получается, что при $c=\frac{2}{3}(\alpha-\beta)^2$ имеется только одно решение $\left(-\frac{2\alpha+\beta}{3},\ \frac{2\alpha+\beta}{3}\right)$.
Замечание. Можно сразу заметить, что решение системы обладает симметрией относительно прямой $y=-x$ (два эллипса с центрами в точках $(-\alpha;\beta)$ и $(-\beta;\alpha)$). Решение будет единственно, если один из эллипсов касается этой прямой. Это выполняется, если уравнение $2(x+\alpha)^2+(x+\beta)^2=c$ имеет единственное решение. Приравняв дискриминант к нулю находим решение. https://ggbm.at/FVmUGS4Y