10 класс

1. Вася написал на страницах 18-листовой тетради натуральные числа. На каждой странице он написал не менее 10 различных чисел, а на каждых из трёх подряд идущих страниц не более 20 различных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел Вася мог написать на страницах тетради? (*А. Храбров*)

Ответ: 190.

Решение. Рассмотрим идущие подряд две страницы, среди которых нет первой. Пусть у них номера n и $n+1$. Тогда на странице $n-1$ есть не менее 10 различных чисел, а на страницах $n-1$, n и $n+1$ не более 20 различных чисел. Следовательно, страницы n и $n+1$ добавляют к числам на предыдущих страницах не более 10 новых чисел.
На первых трех страницах вместе Вася написал не более 20 различных чисел. На четвертой и пятой страницах не более 10 новых чисел, на шестой и седьмой страницах не более 10 новых чисел и т.д.. А на последних трех страницах не более 20 различных чисел. Итого получаем, что у Васи в тетрадке не более $20+15\cdot10+20=190$ различных чисел. Приведем пример, показывающий, что Вася мог написать 190 различных чисел. На первой странице напишем числа от 1 до 10, на второй и третьей страницах — числа от 11 до 20, на четвертой и пятой страницах — числа от 21 до 30 и т.д.. На страницах с номерами $2k$ и $2k+1$ напишем числа от $10k+1$ до $10k+10$. Легко видеть, что на любых трех подряд идущих страницах не более 20 различных чисел, а всего написаны числа от 1 до 190.$\blacksquare$

2. Для каких натуральных чисел n найдется такое натуральное k, что число $2k^2+k+2018$ делится на $n!$ (как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n, например, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4$)? (*А. Храбров*)

Ответ: $n = 1, 2, 3, 4$.

Решение. Рассмотрим остатки от деления числа $2k^2 + k$ на 5: $2 \cdot 0^2 + 0 = 0$ дает остаток 0, $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ дает остаток 3, $2 \cdot 2^2 + 2 = 10$ дает остаток 0, $2 \cdot 3^2 + 3 = 21$ дает остаток 1 и $2 \cdot 4^2 + 4 = 36$ дает остаток 1. Следовательно, остаток числа $2k^2 + k$ от деления на 5 не может быть равен 2. Стало быть, $2k^2 + k + 2018$ не может делиться на 5. Поскольку при $n \geqslant 5$ число $n!$ делится на 5, числа $n \geqslant 5$ заведомо не подходят. Для остальных натуральных n такое k предъявить несложно, например, подойдет $k = 14$, так как $2 \cdot 14^2 + 14 + 2018 = 2424 = 24 \cdot 101$ делится на $4!$.$\blacksquare$

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y + 5 = 2\sqrt{2z + 5}, \\ 2y^2 + 3z + 5 = 2\sqrt{2x + 5}, \\ 2z^2 + 3x + 5 = 2\sqrt{2y + 5}. \end{cases}$$

(*Р. Алишев*)

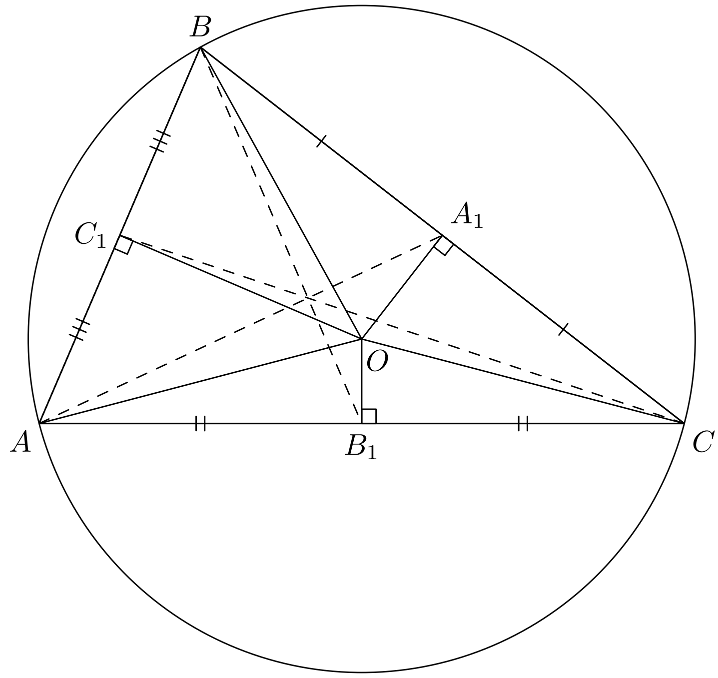
Ответ: $x = y = z = -0,5$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = 2t^2 + 3t + 5 - 2\sqrt{2t + 5}$. Она приводится к виду $f(t) = \frac{1}{2}(2t+1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2t + 5} - 2)^2$. Очевидно, что $f(t) \geqslant 0$ и равенство достигается только в точке $t = -0,5$. Если сложим левые и правые стороны нашей системы, то получим уравнение $f(x) + f(y) + f(z) = 0$, которая имеет решение только при $x = y = z = -0,5$. $\blacksquare$

4. Пусть h — длина наибольшей высоты в треугольнике, R — радиус описанной окружности, m_a, m_b и m_c — длины медиан треугольника. Докажите неравенство $m_a + m_b + m_c \leqslant 3R + h$.

(*А. Храбров*)

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором провели медианы AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть для определенности наименьшая сторона треугольника — сторона AB. Тогда h — высота, опущенная на AB. Обозначим через O центр описанной окружности треугольника. Тогда отрезок OA_1 перпендикулярен стороне BC, отрезок OB_1 перпендикулярен стороне CA и отрезок OC_1 перпендикулярен стороне AB.



По неравенству треугольника $AA_1 \leqslant AO + OA_1 = R + OA_1$. Аналогично $BB_1 \leqslant R + OB_1$ и $CC_1 \leqslant R + OC_1$. Поэтому

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 \leqslant 3R + OA_1 + OB_1 + OC_1$$

и достаточно доказать, что $OA_1 + OB_1 + OC_1 \leqslant h$. Домножим доказываемое неравенство на $\frac{1}{2}AB$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}h \cdot AB = S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = \\ = \frac{1}{2}OC_1 \cdot AB + \frac{1}{2}OA_1 \cdot BC + \frac{1}{2}OB_1 \cdot CA \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}OC_1 \cdot AB + \frac{1}{2}OA_1 \cdot AB + \frac{1}{2}OB_1 \cdot AB = \\ = \frac{1}{2}AB \cdot (OA_1 + OB_1 + OC_1).\blacksquare\end{aligned}$$

5. Несколько человек сыграли однокруговой турнир по настольному теннису. По окончании турнира оказалось, что для любых четырех участников найдутся двое, набравшие поровну очков в играх между этими четырьмя участниками. Какое наибольшее количество теннисистов могло принимать участие в этом турнире? В настольном теннисе не бывает ничьих, за победу дается одно очко, за поражение — ноль очков.

(*из материалов зарубежных олимпиад*)

Ответ: 7 теннисистов.

Решение. Пусть в турнире участвовало $n \geqslant 8$ теннисистов. Тогда всего было сыграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий и, значит, одержано $\frac{1}{2}n(n-1)$ побед. Тогда найдется участник, который одержал не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$ побед. Поэтому какой-то участник одержал хотя бы 4 победы.

Назовем его Андреем. Рассмотрим тех, у кого он выиграл. Пусть это будут Боря, Вася, Гриша и Дима. В матчах между ними было сыграно 6 партий, поэтому кто-то из них одержал хотя бы две победы.

Пусть для определенности это будет Боря и выиграл он у Васи и Гриши. Тогда рассмотрим четверку игроков Андрей, Боря, Вася и Гриша. Андрей в матчах между этими четырьмя игроками все матчи выиграл, поэтому набрал три очка, Боря выиграл ровно два матча, поэтому набрал два очка, победитель матча Васи с Гришей набрал одно, а проигравший очков не набрал.

Поэтому у них в матчах друг с другом набрано разное количество очков и, значит, такая четверка не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, игроков не больше семи.

Приведем пример турнира с семью участниками. Победа обозначена плюсом, поражение — минусом.

	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$-$		$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$-$	$-$		$+$	$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$		$-$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$+$		$+$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$	$-$		$+$
$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	

■