9 класс.

1. (5 баллов) Числа a, b, c удовлетворяют условиям $a < b < 0,\ c > 0$. Какие из следующих неравенств

$$1)\ a^6 > b^6,\ \ 2)\ a + c > b,\ \ 3)\ a - c < b - c,\ \ 4)\ ac > bc,\ \ 5)\ ab > ac,\ \ 6)\ |a + c| \neq |b - c|$$

при данных условиях обязательно выполняются? Перечислите их номера в порядке возрастания без запятых и пробелов.

Ответ: 135

2. (5 баллов) Найдите остаток при делении $20^{16} + 201^6$ на 9.

Ответ: 7

Решение. 201^{16} делится на 9. 20 даёт остаток 2. 2^6 даёт остаток 1, $2^{16} = 2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^4$ даёт такой же остаток, что 16.

3. (7 баллов) Вычислите сумму

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2015 \cdot 2016$$

Ответ: 2731179360

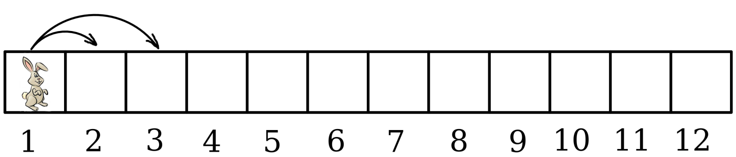
Решение. Заметим, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$.

4. (10 баллов) Если из натурального числа n вычесть сумму его цифр, то получится 2016. Найдите сумму всех таких натуральных n.

Ответ: 20245

Решение. Сумма цифр быстро уменьшается, поэтому число n может быть только четырехзначным. Сумма цифр четырехзначного числа не превосходит 36, следовательно, $n = S(n) + 2016 \leq 2052$, т.е. первые две цифры 2 и 0. Тогда $\overline{20xy} = 2 + x + y + 2016$; $9x = 18$, а y — любое. Сложив все числа от 2020 до 2029 получим ответ.

5. (10 баллов) Заяц прыгает в одном направлении по разделенной на клетки полосе. За один прыжок он может сместиться либо на одну, либо на две клетки. Сколькими способами может заяц добраться с 1-й клетки на 12-ю?



Ответ: 144

Решение. В каждой клетке напишем количество способов, с которыми заяц может туда попасть. В первой клетке 1, во второй 1, далее в каждой клетке количество путей зайца разбивается на 2 группы: последний прыжок на 2 клетки и последний прыжок на 1 клетку. Поэтому в клетке записывается сумма чисел из двух предыдущих (последовательность чисел Фибоначчи).

6. (10 баллов) В равнобокую трапецию с боковой стороной, равной 18, вписана окружность. Расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами равно 8. Найдите радиус окружности.

Ответ: 6

7. (11 баллов) Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную окружность в точке D. Найдите BC, если $AC = DC = \sqrt{8}$.

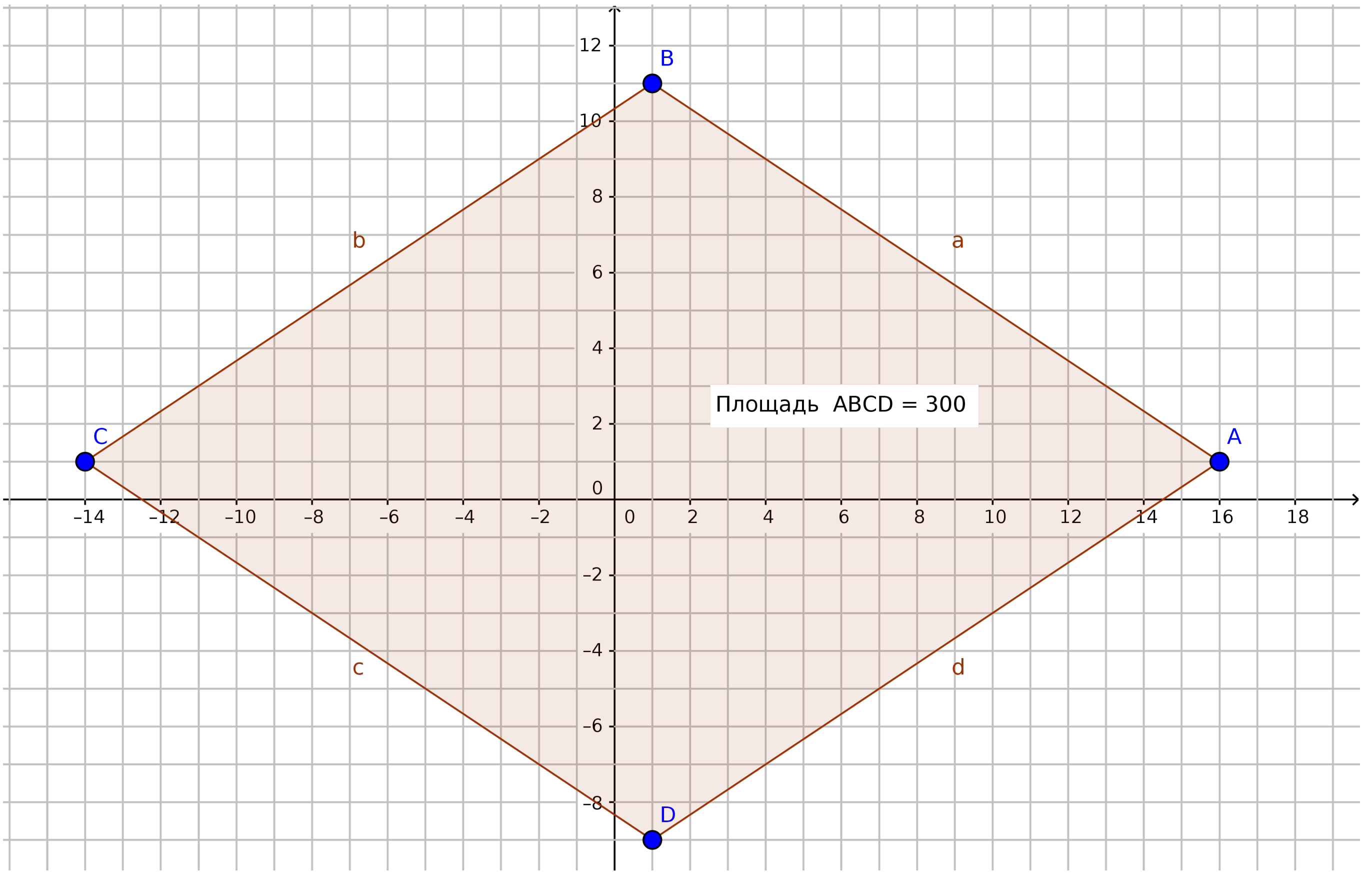
Ответ: 4

8. (12 баллов) На координатной плоскости закрашены все точки, координаты которых удовлетворяют условию

$$|2x - 2| + |3y - 3| \leq 30.$$

Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ: 300



9. (15 баллов) Найдите все значения параметра a, для которых уравнение

$$3x^2 - 4(3a-2)x + a^2 + 2a = 0$$

имеет корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $x_1 < a < x_2$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (1,25; +\infty)$

Решение. $y(x) = 3x^2 - 4(3a-2)x + a^2 + 2a$ — парабола с ветвями вверх, поэтому решением неравенства $y < 0$ является интервал $(x_1; x_2)$. Тогда

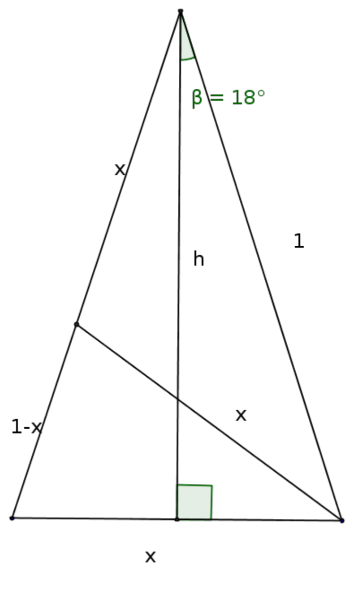
$$a \in (x_1; x_2) \Longleftrightarrow y(a) < 0.$$

Решая неравенство получаем ответ.

10. (15 баллов) Приведите пример ненулевого многочлена с целыми коэффициентами, одним из корней которого является число $\cos 18°$.

Ответ: $16x^4 - 20x^2 + 5$

Решение I. В равнобедренном треугольнике с углом при вершине $36°$ и боковой стороной 1 высота h равна $\cos 18°$. Обозначим основание x, биссектриса угла при основании отсекает от этого треугольника подобный треугольник с отношением соответсвующих сторон $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$. Откуда находим $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. По теореме пифагора $h^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$, $(8h^2-5)^2 = 5$, $64h^4 - 80h^2 + 20 = 0$.



Решение II. Многочлен Чебышева $T_5(x)$, где $T_n(\cos x) = \cos nx$ удовлетворяет условию задачи. (Многочлены Чебышева строятся реккурентно $T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_{n+2} = 2xT_{n+1} - T_n$)