9 класс.

1. Найдите все решения уравнения

$$\frac{x-2}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{4-y}{x}-\frac{|y-2x|}{xy}.$$

Ответ: $x=1$, $y=2$.
Решение. Это уравнение приводится к виду

$$x^2-2x+5=4y-y^2-|y-2x|, \quad xy\neq 0;$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+|y-2x|=0.$$

Каждое слагаемое слева неотрицательно, поэтому сумма будет нулем только для нулевых слагаемых: $x-1=0$, $y-2=0$, $y-2x=0$, $xy\neq 0$. Откуда получаем ответ.

2. Хорда CD окружности с центром в точке O перпендикулярна ее диаметру AB, хорда AE пересекает радиус OC в точке M, а хорда DE — хорду BC в точке N. Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB.
Решение. $\angle CAB=\angle CDB \Longrightarrow \triangle AOC\sim\triangle DBC$ (т.к. равнобедренные). $\angle CAE=\angle CDE$ и $\angle ACM=\angle DCN \Longrightarrow \triangle ACM\sim\triangle DCN$. Из подобий следует, что $\dfrac{CM}{CN}=\dfrac{CA}{CD}=\dfrac{CO}{CB} \Longrightarrow$ отрезок MN делит стороны треугольника OCB на пропорциональные отрезки $\Longrightarrow MN\|OB$.

3. Для натуральных чисел a, b, c и x, y, z выполняются равенства $a^2+b^2=c^2$ и $x^2+y^2=z^2$. Докажите неравенство

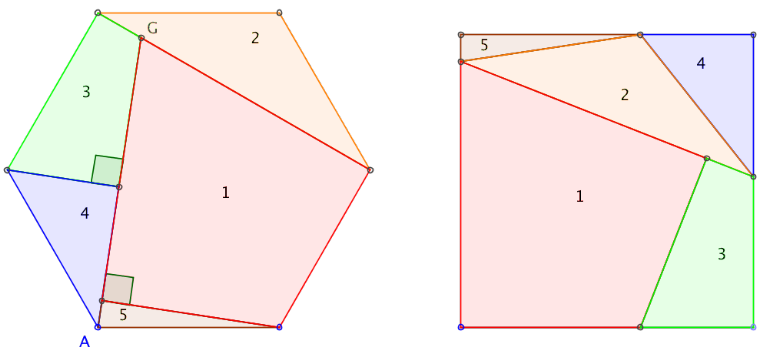
$$(a+x)^2+(b+y)^2\leqslant(c+z)^2.$$

Когда достигается равенство?
Решение. Определим вектора $\vec{c}\{a;b\}$ и $\vec{z}\{x;y\}$. Тогда $|\vec{c}+\vec{z}|\leqslant|\vec{c}|+|\vec{z}|=c+z$ неравенство треугольника. В координатах это неравенство приобретает вид:

$$\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}\leqslant c+z.$$

Равенство достигается, когда вектора $\vec{c}\{a;b\}$ и $\vec{z}\{x;y\}$ одинаково направлены, т.е. $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$.

4. Разрежьте правильный шестиугольник на 5 частей и сложите из них квадрат.
Решение. Отрезок AG равен стороне квадрата.



5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2-4x+2-a \leqslant 0$ и $x^2-5x+2a+8 \leqslant 0$ образуют на числовой оси отрезок, длина которого равна единице.

Ответ: $a=-1; a=-1,75$

Решение. В плоскости Oxa строим множества решений неравенств (часть плоскости, ограниченной параболами) $a \geqslant x^2-4x+2$ и $a \leqslant -0,5x^2+2,5x-4$. В общей части решения находим отрезки AB и CD длины один, соответствующие значениям $a=-1$ и $a=-1,75$ соответсвенно. Других значений нет, так как внутри полосы между прямыми AD и BC все отрезки длины 1, при $a \in (-1,75; -1)$ решение образует отрезок больше одного, вне указанного промежутка — меньше одного.