10 класс.

1. (4 балла) Числа a, b, c удовлетворяют условиям $a < 0 < b,\ c < 0$. Какие из следующих неравенств

$$1)\ a^4 < b^4,\ \ 2)\ a + c < b,\ \ 3)\ a - c < b - c,\ \ 4)\ ac > bc,\ \ 5)\ ab > ac,\ \ 6)\ |a/c| \neq |b/c|$$

при данных условиях обязательно выполняются? Перечислите их номера в порядке возрастания без запятых и пробелов.

Ответ: 234

2. (6 баллов) Известно, что ни одна цифра трехзначного числа не равна нулю и сумма всевозможных двузначных чисел, составленных из цифр этого числа, равна этому числу. Найдите наибольшее такое трехзначное число.

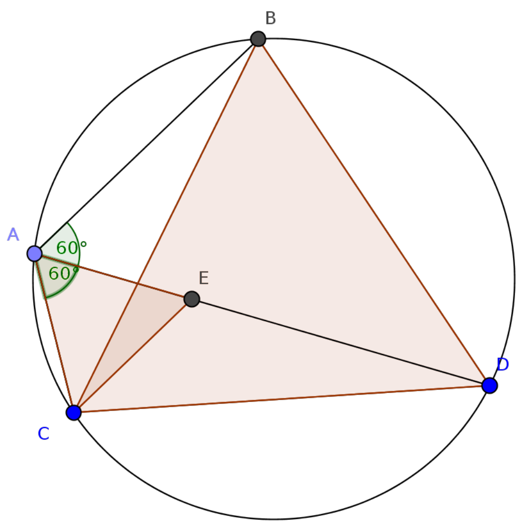
Ответ: 396

Решение. Если имеются одинаковые цифры, то сумма трех двузначных чисел меньше 300. Если цифры различны, то $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb} = 22(a + b + c)$. Сумма цифр дает такой же остаток при делении на 9, что и само число. Поэтому $a + b + c$ делится на 9, следовательно, не превосходит 18. Тогда $\overline{abc} \leq 22 \cdot 18$. 396 подходит.

3. (8 баллов) В окружности проведены хорды AB и AC, причем $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle CAB = 120°$. Найти длину той хорды окружности, которая делит угол CAB пополам.

Ответ: 3

Решение. $AE = AC = 1$, треугольники ACE и BCD правильные. При повороте на $60°$ вокруг точки C треугольник ABC переходит в треугольник EDC. Поэтому $AB = ED = 2$.



4. (10 баллов) Квадрат разбит на 2016 треугольников, причем вершины никакого треугольника не лежат на сторонах или внутри другого треугольника. Стороны квадрата являются сторонами некоторых треугольников разбиения. Сколько всего точек, являющихся вершинами треугольников, находится внутри квадрата?

Ответ: 1007

Решение. Пусть у нас k точек внутри квадрата. Тогда сумма углов всех треугольников равна $360k + 4 \cdot 90 = 180 \cdot 2016$ градусов.

5. (10 баллов) Антон, Борис, Вадим, Гена, Дима и Егор собрались в кинотеатр. Они купили 6 мест подряд в одном ряду. Антон и Борис хотят сидеть рядом, а Вадим и Гена — не хотят. Сколькими способами ребята могут сесть на свои места с учетом этих желаний?

Ответ: 144

Решение. Всего способов рассадки, когда Антон и Борис сидят рядом равно $2 \cdot 5! = 240$. Способов рассадки, при которых пары Антон-Борис и Вадим-Гена окажутся рядом $2 \cdot 2 \cdot 4! = 96$. Из первого множества убирая второе получим ответ.

6. (10 баллов) У ромба $ABCD$ угол B равен $40°$. E — середина стороны BC. F — основание перпендикуляра, опущенного из точки A к прямой DE. Найдите угол DFC.

Ответ: 110

7. (10 баллов) Решите систему уравнений. В ответ напишите наибольшее значение y.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 27, \\ 3x^2 - xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

Ответ: 3

Решение. Вычитая со второго уравнения первое получим, что $2x^2 - 4xy + 2y^2 = 0$, откуда $x = y$. Подставив в первое уравнение получим ответ.

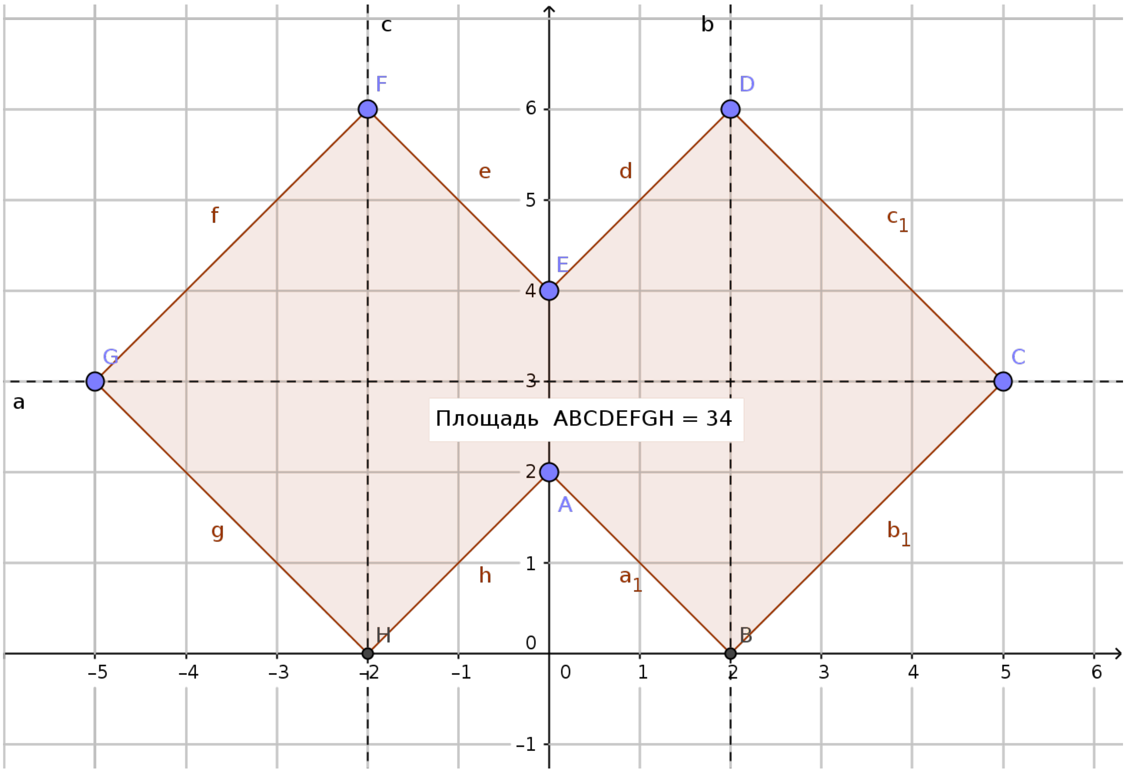
8. (12 баллов) На координатной плоскости закрашены все точки, координаты которых удовлетворяют условию

$$||x| - 2| + |y - 3| \leq 3.$$

Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ: 34

Решение. Многоугольник, который получается решением уравнения $||x| - 2| + |y - 3| = 3$ состоит из кусков прямых, склеенных в особых точках: $x = 0, x = 2, x = -2, y = 3$.



9. (15 баллов) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(\sqrt{a^2 - x^2 - 2x - 1}) = 0,5$$

имеет ровно семь различных решений.

Ответ: $\pm\dfrac{17\pi}{6}$

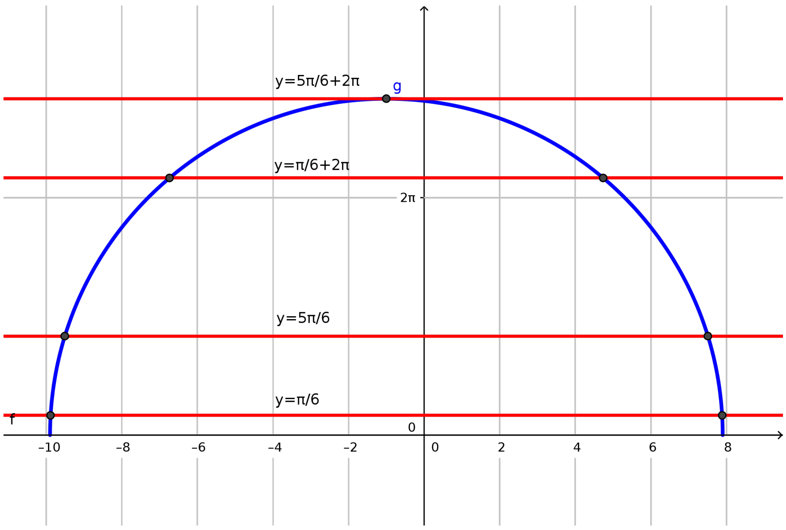
Решение. Количество решений исходного уравнения совпадает с количеством решений системы

$$\begin{cases} y = \sqrt{a^2 - x^2 - 2x - 1}, \\ \sin y = 0,5. \end{cases}$$

Что равносильно

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + (x+1)^2 = a^2, \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Решение уравнения $\sin y = 0,5$ представляется семейством горизонтальных прямых (красные линии), а уравнения $y = \sqrt{a^2 - x^2 - 2x - 1}$ полуокружностью с центром в точке $(-1; 0)$ и радиусом $|a|$. Радиус окружности выбираем так, чтобы полуокружность касалась четвертой линии выше нуля. Откуда $|a| = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi$.



10. (15 баллов) Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n. Докажите, что существует бесконечное множество натуральных чисел n, не заканчивающихся на 0, таких, что $S(n^2) = S(n)$.

Решение. Подходят все числа вида $n = 10^k - 1$. $10^k - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{k}$, $S(10^k - 1) = 9k$.

$n^2 = (10^k - 1)^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1 = \underbrace{9\ldots9}_{k-1}8\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1$. $S(n^2) = 9(k-1) + 8 + 1 = 9k$.