10 класс.

1. Существует ли такое число x, что все три числа $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}$ и $\frac{1}{x^2+1} - 2x$ являются целыми?

Решение. Допустим, что все числа целые. Тогда их сумма $-x$ — тоже целое. Но дроби $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2+1}$ при целых x обе целыми быть не могут.

2. Стороны выпуклого четырехугольника в каком-то порядке равны 6, 7, 8, 9. Известно, что в этот четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Найдите площадь четырехугольника.

Решение. В выпуклый четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = BC + AD$. Следовательно, не ограничивая общности, можно считать, что $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 9$, $AD = 7$. По теореме косинусов

$$BD^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos A, \quad BD^2 = 8^2 + 9^2 - 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \cos C.$$

$\cos C = -\cos A$, так как $\angle A + \angle C = 180°$. Откуда

$$85 - 84 \cos A = 145 + 144 \cos A, \quad \cos A = -\frac{5}{19}.$$

Тогда $\sin A = \sin C = \sqrt{1 - \frac{25}{361}} = \frac{4\sqrt{21}}{19}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot AD + BC \cdot CD) \sin A = 12\sqrt{21}.$$

3. Решите уравнение $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{3}{2}z^2 + t^2 + \frac{1}{3} = xy + yz + zt + t$.

Решение. Умножим все на 2 и перепишем равенство в виде

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (t^2 - 2zt + z^2) + (t^2 - 2t + 1) + z^2 = \frac{1}{3}$$

или

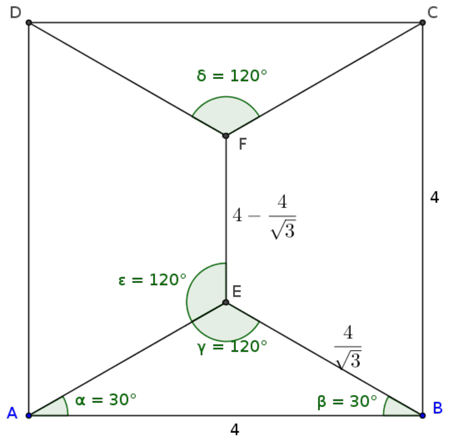
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (t - z)^2 + (1 - t)^2 + z^2 = \frac{1}{3}.$$

Докажем вспомогательное неравенство: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, причем равенство имеет место только при $a = b = c$. Действительно, оно равносильно неравенству $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, или $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ca$. Последнее неравенство в свою очередь есть сумма трех неравенств Коши: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, $c^2 + a^2 \geqslant 2ca$. Причем для выполнения равенства необходимо, чтобы $a = b$, $b = c$, $c = a$.

Заметим, что по доказанному неравенству $(t - z)^2 + (1 - t)^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$, так как $(t - z) + (1 - t) + z = 1$. Кроме того, ясно, что $(x - y)^2 + (y - z)^2 \geqslant 0$. Следовательно, исходное равенство может иметь место только при $x - y = y - z = 0$ и $t - z = z = 1 - t$ (именно в таком порядке, чтоб сумма равнялась 1). Решая эту систему, находим $x = y = z = 1/3$, $t = 2/3$.

4. Необходимо соединить в одну электрическую сеть четыре светильника, находящихся в вершинах квадрата со стороной 4 метра. Хватит ли на это 11 метров провода? (Другими словами, существует ли связный граф, содержащий вершины квадрата со стороной 4, сумма длин ребер которого не превосходит 11?)

Решение. Да, хватит. Если соединить как показано на рисунке, $AE + BE + CF + DF + EF = 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + 4 - \frac{4}{\sqrt{3}} = 4 + 4\sqrt{3} < 11$.



5. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \dfrac{a^2x+2a}{ax-2+a^2} \geqslant 0, \\ ax+a > \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: $a \in (-\infty; -0,5] \cup \{0\}$

Решение. Значение $a = 0$ удовлетворяет условию задачи. При $a \neq 0$ делаем замену переменной $t = ax$. Для каждого t существует единственный $x = \dfrac{t}{a}$.

$$\begin{cases} \dfrac{at+2a}{t-2+a^2} \geqslant 0, \\ t+a > \dfrac{5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{a(t+2)}{t-2+a^2} \geqslant 0, \\ t+a > \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Решаем графически на плоскости Ota. Заштрихованная область на рисунке — решение системы. Координаты точки А находим решая уравнение $a^2 - a - \dfrac{3}{4} = 0$.