

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика» общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 1

1. В 100 емкостях трех типов вместимости по 1 л, 10 л и 50 л разлито 500 литров масла. Сколько потребовалось емкостей каждого типа, если количество масла в каждой емкости соответствует ее вместимости? (12 баллов)

2. Решите неравенство $\frac{x^2}{3} + \frac{40}{x} + \frac{48}{x^2} \geq \frac{10|x|}{3}$. (12 баллов)

3. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел a и b равен d . Определите наибольший общий делитель чисел $5a + 3b$ и $13a + 8b$. (16 баллов)

4. Найдите все натуральные числа $n \geq 2$, для которых верно равенство

$$4x_n + 2y_n = 55n^2 + 61n - 116, \text{ где}$$

$$x_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n, \quad y_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2. \quad (20 \text{ баллов})$$

5. Укажите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{2y}{3} - \frac{|x-1|}{x-1} - 1 \right) (y-1) = 0, \\ y = a + \frac{|x-1|}{(x-1)(x-y)^2} \end{cases} \text{ имеет ровно четыре различных решения.}$$

Найдите эти решения при каждом указанном a . (20 баллов)

6. В треугольнике ABC через произвольную точку O проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник ABC разбивается на три параллелограмма и три треугольника. Площади получившихся треугольников равны 6 см^2 , 24 см^2 , 54 см^2 . Найдите площадь треугольника ABC . (20 баллов)

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование и графика» общеобразовательный предмет «Математика», весна 2020 г.

10 класс

Вариант № 2

1. Клоун ездит по арене цирка на велосипеде, у которого радиус окружности переднего колеса вдвое меньше радиуса окружности заднего колеса. Если бы длину окружности переднего колеса увеличили на метр, а заднего уменьшили на метр, то на протяжении 40 м заднее колесо сделало бы на 20 оборотов больше переднего колеса. Определите длину окружностей колес. (12 баллов)

2. Сравните два числа: $\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} \dots + \sqrt{2}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$, ($n \geq 1$) и $\frac{1}{4}$. (12 баллов)

3. Школьникам раздали 7 листов бумаги и попросили разрезать некоторые из них на 7 частей. Полученные кусочки бумаги перемешали и опять попросили некоторые из них разрезать на 7 частей. Так повторилось несколько раз. Сколько кусков бумаги надо разрезать, чтобы в итоге получился 331 кусок. (16 баллов)

4. Решите уравнение $10x - 6 + x^2 = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{49 + (x + 4)^2}$ (20 баллов)

5 Дан произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки K и M середины сторон AB и CD соответственно. Точка P - точка пересечения линий KC и BM , точка N - пересечение AM и KD . Найдите площадь четырехугольника $KPNM$, если углы CBP и NDA равны 30 градусам, $BPC - 105^\circ$, $DAN - 15^\circ$. $BP = 2\sqrt{2}$, $ND = \sqrt{3}$. (20 баллов)

6. При каких значениях параметра a корни x_1, x_2 уравнения $x^2 - 2ax - \frac{1}{a^2} = 0$ удовлетворяют равенству $x_1^4 + x_2^4 = 16 + 8\sqrt{2}$? (20 баллов)