Решение варианта № 1

1. Имеются контейнеры двух видов: по 27кг и по 65кг. Сколько было всего контейнеров первого и второго видов, если груз в контейнерах первого вида превышает груз контейнеров второго вида на 34кг, и количество контейнеров по 65кг не превышает 44 штук?

Решение. Пусть x – количество контейнеров по 27кг, y – количество контейнеров по 65кг. Получим уравнение $27x - 65y = 34$.
$27(x – 2y) – 11y = 34$, обозначим $x – 2y = k$. (1)
$27k – 11y = 34$,
$11(2k – y) + 5k = 34$, обозначим $2k – y = t$. (2)
$11t + 5k = 34$,
$5(2t + k) + t = 34$, обозначим $2t + k = n$. (3)
$5n + t = 34$, $t = 34 – 5n$.
Подставим в (3), $k = 11n – 68$.
Подставим в (2), $y = 27n – 170$.
Подставим в (1), $x = 65n – 408$.
Так как $x > 0$, $0 < y \le 44$, то $n = 7$. Тогда, соответственно, $x = 47$, $y = 19$ или 47 и 19 контейнеров, всего 66 контейнеров.
Ответ: 66.

2. Найдите сумму всех целых значений c, при которых уравнение $27|p-2|+|4p-|p+c||=5p$ относительно p имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию $f(p)=27|p-2|+|4p-|p+c||-5p$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при p (27>4+1+5). Отсюда следует, что на всех интервалах до $p=2$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $p=2$ - положителен, $p=2$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(p)=0$ имело хотя бы один корень необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(2)\le 0$. Решим неравенство.
Обозначим $|2+c|=t$, получим $|8-t|-10\le 0$, $(8-t)^2-10^2\le 0$,

$$(18-t)(t+2)\ge 0,\ t\in[-2;18],\ |c+2|\le 18,\ c\in[-20;16],$$

сумма целых значений c: -74.
Ответ: -74.

3. В ралли принимали участие 30 автомобилей. Каждый из них получил порядковый номер - числа от 1 до 30. Но перед самым стартом получилось, что один их автомобилей не может участвовать в гонках в связи с техническим состоянием. Тогда оказалось, что среди оставшихся 29 номеров, есть номер равный среднему арифметическому этих 29 номеров. Каков номер автомобиля, выбывшего из гонок? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ сумму этих чисел.

Решение. Сумма номеров всех автомобилей, первоначально равная 1+2+3+…+30=465 и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от 465-30=435 до 465-1=464. Она, кроме того, кратна 29, поскольку в 29 раз больше одного из слагаемых. А так как из чисел 435, 436, 437, … ,464 только числа 435 и 464 кратны 29, то стёрли либо число 30=465-435, либо 1=465-464. В обоих случаях среднее арифметическое номеров автомобилей, оставшихся на ралли, не совпадает со стёртым числом.

Ответ: 31.

4. Вася с отцом собирают грибы в лесу. Отец сказал Васе: «Иди вперёд по этой прямой дороге. Я быстро осмотрю полянку и догоню тебя». Шаг отца на 20% длиннее шага Васи. Они оба идут с постоянной скоростью и не меняют длину своих шагов. Существует промежуток времени, за который и отец, и Вася делают по целому числу шагов. При этом каждый раз оказывается, что отец сделал на t% шагов меньше, чем Вася. При каком наибольшем целом значении t отец начнёт догонять Васю?

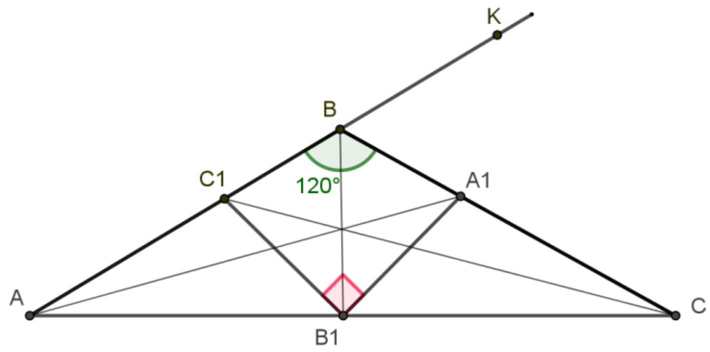
Решение. Пусть x- длина шага Васи, y – число шагов, которое он делает в указанную в условии единицу времени. Тогда xy – путь, пройденный Васей за это время, $1,2xy(1-\frac{t}{100})$ - путь, пройденный отцом. Чтобы отец и Вася начали сближаться, должно выполняться неравенство $1,2xy(1-\frac{t}{100})>xy$. $\frac{6}{5}(1-\frac{t}{100})>1$; $1-\frac{t}{100}>\frac{5}{6}$; $t<\frac{100}{6}$. Наибольшее целое значение t, удовлетворяющее неравенству, t = 16%.
Ответ: 16.

5. Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через сколько времени (в минутах) они совпадут в 23-й раз. Ответ округлите до сотых.

Решение. Минутная стрелка проходит за час 1 круг, а часовая 1/12 круга, значит скорость их сближения 11/12 круга в час, одно сближение занимает 1/(11/12)=12/11 часа или 720/11 минут. 23 сближение произойдет через $23\cdot\frac{720}{11}=\frac{16560}{11}$ минут.

Ответ:1505,45.

6. В треугольнике ABC с углом $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Найти градусную меру угла $C_1B_1A_1$.
Решение.

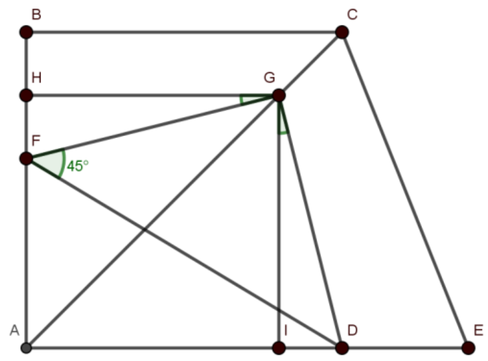


Продолжим сторону AB за точку B, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK. Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Таким образом, B_1A_1 - биссектриса $\angle BB_1C$.

Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$. Следовательно, $\angle C_1B_1A_1 = 90^0$, как угол между биссектрисами смежных углов.
Ответ: 90.

7. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой BC и AE равны 5 и 7, соответственно. Меньшая боковая сторона AB равна BC. На AB отмечена точка F так, что BF:FA=2:3, на AC отмечена точка G так, что AG:GC=4:1; на AE отмечена точка D так, что AD:DE=5:2. Определите градусную меру угла DFG.

Решение. Построим перпендикуляры GI и GH.



1) $\Delta GID = \Delta GFH$ - по двум катетам, так как $GI = GH = 4;$ $FH = ID = 1,$ поэтому $FG = GD,$ $\angle FGH = \angle DGI = \alpha$.

2) $GIAH$ - квадрат, значит $\angle IGH = 90^0,$ $\angle IGH = \angle FGH + \angle IGF = \alpha + \angle IGF$.

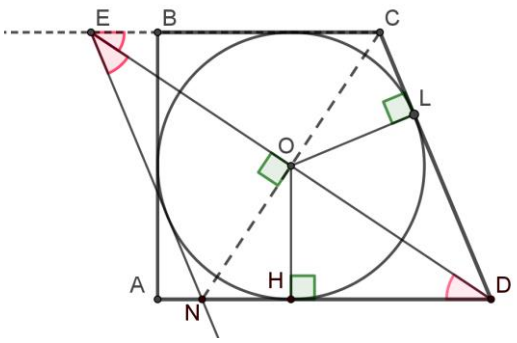
3) $\angle DGF = \angle DGI + \angle IGF = \alpha + \angle IGF = 90^0.$

4) ΔDFG - прямоугольный равнобедренный треугольник, так как $FG = GD,$ и значит $\angle DFG = 45^0.$

Ответ: 45.

8. В прямоугольную трапецию с основаниями BC и $AD,$ где $BC:AD = 2:3,$ вписана окружность с центром O. Прямые DO и BC пересекаются в точке E. В каком отношении касательная к окружности, проведенная из точки $E,$ делит сторону трапеции $AD,$ считая от точки $A.$

Решение.



Пусть $BC = 2a,$ $AD = 3a.$ Найдем радиус окружности вписанной в трапецию. Центр окружности точка O – точка пересечения биссектрис углов трапеции. Биссектрисы углов трапеции с вершинами C и D пересекаются под прямым углом, тогда треугольник COD прямоугольный с высотой OL, равной радиусу окружности r, следовательно: $r^2 = (2a - r)(3a - r)$, $r = \frac{6a}{5}$.

Пусть касательная к окружности проведенная из точки E пересекает сторону AD в точке N, тогда $\angle NEO = \angle OEC$ (EO – биссектриса), а $\angle OEC = \angle ADO$, значит, треугольник END равнобедренный, а, следовательно, NO – биссектриса и высота.

Рассмотрим прямоугольный треугольник NOD с высотой OH:

$$OH^2 = NH \cdot HD,$$

$$\left(\frac{6a}{5}\right)^2 = NH \cdot (3a - \frac{6a}{5}),$$

$$NH = \frac{4a}{5} \Rightarrow AN : NH = 1:2,$$

$$AN : ND = \frac{2a}{5} : (3a - \frac{2a}{5}) = 2:13.$$

Ответ: $2:13$.

9. Студент-химик провел эксперимент: из бака, наполненного раствором сиропа вылил несколько литров жидкости, долил бак водой, потом вылил в два раза большее количество жидкости и опять долил бак водой. В результате количество сиропа в баке уменьшилось в $\frac{8}{3}$ раза. Определить сколько литров жидкости вылил студент первый раз, если объем бака 1000 литров.

Решение.

1) Пусть содержание сиропа в исходном растворе p % и пусть x литров раствора было вылито в первый раз.
2) Тогда после отлития жидкости осталось $(1000 - x)$ литров раствора, а в нем $(1000 - x) \cdot \frac{p}{100}$ литров сиропа и $(1000 - x) \cdot \frac{100 - p}{100}$ воды.
3) После того как долили x литров воды в баке стало: 1000 литров раствора, а в нем $(1000 - x) \cdot \frac{p}{100}$ литров сиропа и $(1000 - x) \cdot \frac{100 - p}{100} + x$ литров воды.
4) В конце всех переливаний в баке стало: 1000 литров раствора с содержанием сиропа $\frac{3p}{8}$%, то есть $1000 \cdot \frac{\frac{3p}{8}}{100} = \frac{30p}{8}$ литров сиропа и $1000 - \frac{30p}{8}$ литров воды.
5) Тогда до последнего долития $2x$ литров воды в баке было $(1000 - 2x)$ литров раствора, а в нем $\frac{30p}{8}$ литров сиропа и $1000 - \frac{30p}{8} - 2x$ воды. Это та же жидкость, что и в пункте 3) решения, соответственно соотношения сиропа и жидкости в ней одинаково.

Составим уравнение:

$$\frac{(1000-x)\cdot\frac{p}{100}}{1000}=\frac{\frac{30p}{8}}{1000-2x} \Leftrightarrow 2x^2-3000x+\frac{5}{8}\cdot 1000^2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x\in\{1250;250\}$, 1250 литров не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 250.

Решение варианта № 2

1.Если натуральное двузначное число уменьшить на 27, то получится двузначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите медиану числового ряда, составленного из всех таких чисел.

Решение.

Пусть $\overline{xy} = 10x + y$ - исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ - число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 27$. Из уравнения видно, что двузначное число больше 27. Начнем исследование с числа десятков равному 3.

x	***уравнение***	***y***	***число***
3	$30 + y = 10y + 3 + 27$	$y = 0$	30 не подходит по условию
4	$40 + y = 10y + 4 + 27$	$y = 1$	41
5	$50 + y = 10y + 5 + 27$	$y =2$	52
6	$60 + y = 10y + 6 + 27$	$y =3$	63
7	$70 + y = 10y + 7 + 27$	$y =4$	74
8	$80 + y = 10y + 8 + 27$	$y =5$	85
9	$90 + y = 10y + 9 + 27$	$y = 6$	96

Это могут быть числа 41, 52, 63, 74, 85, 96. Медиана ряда равна 68,5.

Ответ: 68,5.

2. Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение $\left||r+h|-3r\right|-7r=12|r-2|$ относительно r имеет не более одного корня.

Решение. Рассмотрим функцию $f(r)=12|r-2|+7r-\left||r+h|-3r\right|$. Коэффициент при первом модуле больше суммы модулей остальных коэффициентов при r (12>7+1+3). Отсюда следует, что на всех интервалах до $r=2$ коэффициент в линейном выражении отрицателен, а после $r=2$ - положителен, $r=2$ - точка минимума. Для того, чтобы уравнение $f(r)=0$ имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство: $f(2)\geq 0$. Решим неравенство. Обозначим $|2+h|=t$, получим $14-|t-6|\geq 0$, $(t-6)^2-14^2\leq 0$,

$$(t-20)(t+8)\leq 0,\ t\in[-8;20],\ |h+2|\leq 20,\ h\in[-22;18],$$

сумма целых значений h: -82.

Ответ: -82.

3. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 8 очков, если десяток было 4, результатами попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

Решение. Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз, в восьмёрку два раза, а в девятку – три раза.

Ответ: 2.

4. Бабушка и внучка собирали землянику, внучка – в детское ведёрко вместимостью 2,5 л, а бабушка – в двухлитровую банку. Бабушка плохо видит и нагибаться ей тяжело, поэтому внучка всё время собирала ягоды быстрее неё. Когда бабушка набрала половину своей банки, они с внучкой поменялись своими ёмкостями для сбора ягод и через некоторое время наполнили их одновременно. Сколько литров ягод собрала внучка за всё время работы, если считать, что производительность труда и бабушки и внучки всё время одинакова?

Решение. Пусть внучка собрала x л ягод за то время, за которое бабушка собрала 1 л, $x>1$ по условию задачи. После обмена ёмкостями внучка собрала 1 л ягод, а бабушка $(2,5-x)$ л. Так как производительность их труда не меняется, то и отношение количества собранных ягод постоянно. Составим уравнение: $\frac{1}{x}=\frac{2,5-x}{1}$; $2x^2-5x+2=0$, которое имеет два корня $x_1=2, x_2=0,5$.

Второй корень не подходит по условию задачи. Всего внучка собрала 2+1=3 л ягод.

Ответ: 3.

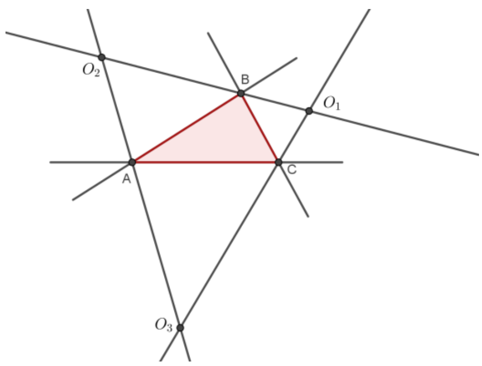
5. Эльвира берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число заменяется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 2019-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {100; 89; 60}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то выпишите их без пробела в порядке возрастания.

Решение. Обозначим 3 числа, как {x; x+a; x+b}, где 0<a<b. Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться b.

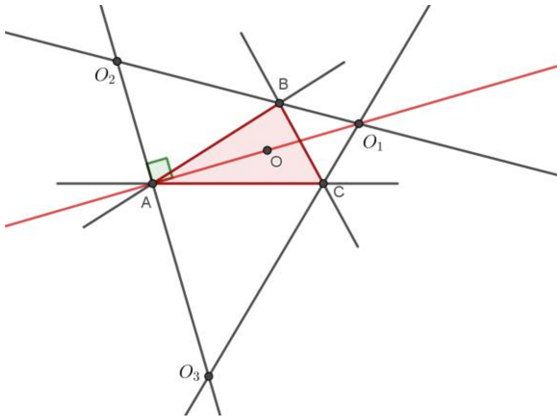
b=100-60=40.

Ответ: 40.

6. Дан треугольник ABC. Прямые $O_1O_2,\ O_1O_3, O_3O_2$ - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол в градусах между прямыми O_1O и O_2O_3.



Решение. Точка O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC, следовательно, биссектриса AO перпендикулярна прямой O_2O_3 (как биссектрисы смежных углов треугольника).

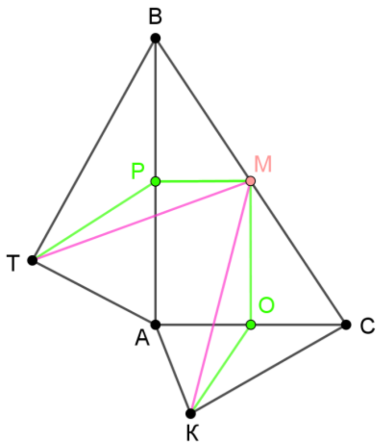


Точка O_1, как равноудаленная от прямых AB и AC, лежит на AO. Следовательно, прямая O_1O, совпадающая с AO, перпендикулярна прямой O_2O_3.

Ответ: 90.

7. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC $\left(\angle BAC = 90^0\right)$, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK так, что $\angle ATB = \angle AKC = 90^0$, $\angle ABT = \angle ACK = 30^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.

Решение. На серединах сторон AB и AC отметим точки P и O, соответственно. Соединим точку P с точками M и T, а точку O с точками K и M.



Тогда: 1) $\Delta TPM = \Delta KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как

$$AO = \tfrac{1}{2}AC = KO = PM\ ,$$

$$AP = \tfrac{1}{2}AB = TP = OM\ ,$$

$$\angle TPM = \angle TPA + \angle APM = \angle AOK + \angle AOM = \angle KOM.$$

Значит TM=MK, $\angle PMT = \angle MKO$, и $\angle PTM = \angle KMO$.

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$:

$$\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^0 - \angle MOK.$$

В свою очередь $\angle MOK = 360^0 - \angle KOC - \angle MOC = 360^0 - 120^0 - \angle BAC = 240^0 - \angle BAC.$

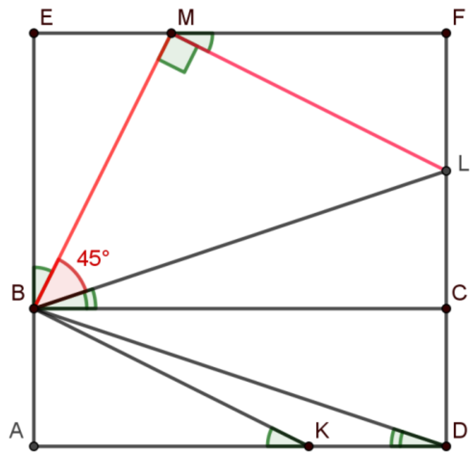
3) $\angle KMT = \angle PMO - (\angle PMT + \angle KMO) = \angle BAC - (180^0 - \angle MOK) \Rightarrow$

$\angle KMT = \angle BAC - 180^0 + 240^0 - \angle BAC = 60^0.$

Ответ: 60.

8. В прямоугольнике $ABCD$ известно соотношение длин сторон $AB : AD = 1:3$. Точка K принадлежит AD и делит ее в отношении 2:1, считая от точки A. Найти сумму градусных мер углов $\angle AKB$ и $\angle ADB$.

Решение. Достроим прямоугольник $ABCD$ до квадрата $AEFD$ со стороной AD.



1. Пусть $M \in EF, EM : MF = 1:2,\ L \in FD, FL = LC.$ Тогда получаем равные треугольники: $\triangle AKB = \triangle EBM = \triangle FML.$

2. Далее, $BM = ML,\ \angle BML = 90^0$, следовательно, $\angle MBL = 45^0.$

3. Окончательно,

$$\angle AKB + \angle ADB = \angle EBM + \angle LBC = 90^0 - \angle LBM = 90^0 - 45^0 = 45^0.$$

Ответ: 45.

9. Студент-химик провел эксперимент: из бутыли, наполненной раствором сиропа вылил один литр жидкости, долил бутыль водой, потом опять вылил один литр жидкости и опять долил бутыль водой. В результате процентное содержание сиропа снизилось с 9 до 4 процентов. Определить объем бутыли в литрах.

Решение.

1) Пусть x - объем бутыли в литрах.
2) Тогда после отлития одного литра жидкости осталось $(x-1)$ литров раствора, а в нем $(x-1)\cdot\frac{9}{100}$ литров сиропа и $(x-1)\cdot\frac{91}{100}$ воды.

3) После того как долили один литр воды в бутыли стало: x литров раствора, а в нем $(x-1)\cdot\frac{9}{100}$ литров сиропа и $(x-1)\cdot\frac{91}{100}+1$ литров воды.

4) В конце всех переливаний в бутыли стало: x литров раствора, а в нем $x\cdot\frac{4}{100}$ литров сиропа и $x\cdot\frac{96}{100}$ воды.

5) Тогда до последнего долития литра воды в бутыли было $(x-1)$ литров раствора, а в нем $x\cdot\frac{4}{100}$ литров сиропа и $x\cdot\frac{96}{100}-1$ воды. Это та же жидкость, что и в пункте 3) решения, соответственно соотношения жидкости и воды в ней одинаково.

Составим уравнение:

$$\frac{(x-1)\cdot\frac{9}{100}}{x\cdot\frac{4}{100}}=\frac{(x-1)\cdot\frac{91}{100}+1}{x\cdot\frac{96}{100}-1} \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot 9}{x\cdot 4}=\frac{(x-1)\cdot 91+100}{x\cdot 96-100} \Leftrightarrow$$

$$\frac{9x-9}{4x}=\frac{91x+9}{96x-100} \Leftrightarrow (9x-9)(96x-100)=4x(91x+9) \Leftrightarrow$$

$$5x^2-18x+9=0 \Leftrightarrow x\in\{3;0,6\}.$$

0,6 литров не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.