Решение варианта № 1

1. (10 баллов) Решите неравенство: $3\sqrt{x+4} \le 5 - 2|x+2|$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sqrt{x+4} - 5 + 2|x+2|$. ОДЗ: $x \ge -4$. Найдем нули этой функции, т.е. решим уравнение $3\sqrt{x+4} = 5 - 2|x+2|$. Обозначим $y = \sqrt{x+4}$. Рассмотрим полученную систему: $\begin{cases} 3y = 5 - 2|y^2 - 2| \\ y \ge 0 \end{cases}$.

Рассмотрим два случая:

1. $\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{2} \\ 3y = 5 + 2y^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{2} \\ (y-1)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

2. $\begin{cases} y \ge \sqrt{2} \\ 3y = 5 - 2y^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge \sqrt{2} \\ (y+3)\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Вернемся к x : $\sqrt{x+4} = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -3, -\frac{15}{4}, -\frac{7}{4}$. Найдем знаки функции $f(x)$ на промежутках: $\left(-\frac{7}{4}, +\infty\right)$, $\left(-3, -\frac{7}{4}\right)$, $\left(-\frac{15}{4}, -3\right)$ и $\left(-4, -\frac{15}{4}\right)$:

$f(0) = 6 - 5 + 4 > 0$,

$f(-2) = 3\sqrt{2} - 5 < 0$,

$f\left(-\frac{13}{4}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 + 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2} > 0$, т.к. 27>25,

$f\left(-\frac{31}{8}\right) = 3 \cdot \sqrt{4 - \frac{31}{8}} - 5 + 2 \cdot \left|-\frac{31}{8} + 2\right| = \frac{3\sqrt{2} - 5}{4} < 0.$

Так как нужно решить неравенство $f(x) \le 0$, то его решение есть множество: $\left[-4; -\frac{15}{4}\right] \cup \left[-3; -\frac{7}{4}\right]$.

Ответ: $\left[-4; -\frac{15}{4}\right] \cup \left[-3; -\frac{7}{4}\right]$.

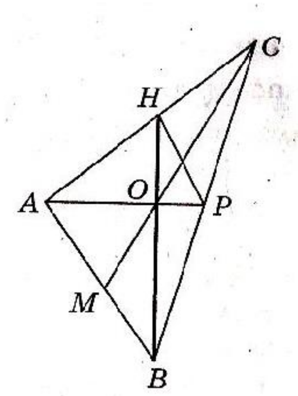
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	10

2. (15 баллов) Две медианы треугольника, равные 18 и 24, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

Решение. Пусть AP=18 и BH=24. Найдём длину медианы CM. По свойству медиан в ΔABC имеем:

$AO:OP = BO:OH = 2:1 \Rightarrow AO =$

$= \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12; BO = \frac{2}{3}BH = \frac{2}{3}\cdot 24 = 16.$



Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном $\Delta AOB: AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$. А так как OM – медиана этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, то $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 20 = 10$. Учитывая, что $CO:OM = 2:1$, получаем: $CM = 3OM = 3\cdot 10 = 30$.

Ответ: 30.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, описанных выше.	0
Максимальный балл	15

3. (15 баллов) Степан и Павел готовили корм для лошадей из овса, кукурузы и сена. Известно, что Степан заготовил корм, содержащий 40% сена, а Павел – 26% овса. Процентное содержание кукурузы в первом и втором наборах одинаковое. Перемешав 150кг заготовки собранной Степаном и 250 кг Павлом, получили новый набор, в котором оказалось 30% кукурузы. Определите, сколько килограмм сена содержится в получившемся сборе.

Решение.

	овёс	кукуруза	сено	масса
Степан		x%	40%	150кг
Павел	26%	x%	74%- x%	250кг
Новый набор		30%		400кг

1.Определим процентное содержание кукурузы: $\frac{x}{100}\cdot 150 + \frac{x}{100}\cdot 250 = 400\cdot 0,3 \Leftrightarrow$

1,5x+2,5x=120, $\Leftrightarrow$ x=30. $\Leftrightarrow$ x=30%.

2. Определим массу сена: $0,4\cdot 150 + 0,44\cdot 250 = 60 + 110 = 170.$

Ответ: 170.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменной, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные шаги возможного решения.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

4. (20 баллов) Определите, при каких значениях параметра a уравнение $(a+1)(x^2+1)^2-(2a+3)(x^2+1)x+(a+2)x^2=0$ имеет ровно два различных действительных корня.

Решение. 1. Заметим, что $x=0$ - решение при $a=-1$. Подставляя это значение параметра в исходное уравнение, получим уравнение $-x(x^2-x+1)=0$, которое не имеет других корней, кроме нуля. Следовательно, если $x=0$ - решение уравнения, то $a=-1$ и, более того, $x=0$ - единственное решение уравнения. Значит, это значение параметра нам не подходит и $x=0$ не может быть одним из двух различных корней этого уравнения.

2. Заметим, что уравнение является однородным относительно множителей (x^2+1) и x^2, и разделим его почленно на x^2. Получим уравнение $(a+1)(x+\frac{1}{x})^2-(2a+3)(x+\frac{1}{x})+a+2=0$.

Сделаем замену $x+\frac{1}{x}=t$ и получим квадратное уравнение относительно переменной t: $(a+1)t^2-(2a+3)t+a+2=0$ (1).

3. Исследуем количество решений уравнения $x+\frac{1}{x}=t$ в зависимости от t. $x^2-tx+1=0$; $D=t^2-4$; $D<0$ при $t\in(-2;2)$; $t=\pm 2$ соответствует единственное значение x, а каждому $t\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ соответствует по два различных значения x (также можно использовать известные числовые неравенства для положительных чисел $x+\frac{1}{x}\geq 2$ и для отрицательных $x+\frac{1}{x}\leq -2$, график функции $t=x+\frac{1}{x}$).

4. Исследуем теперь количество решений уравнения (1) с переменной t. Заметим, что t=1 – решение при любом значении параметра. Этому корню в соответствии с вышесказанным не соответствует

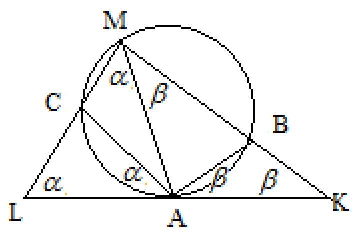
ни одного x. По теореме Виета $t_2 = \dfrac{a+2}{a+1}$. Исходное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a+2}{a+1} > 2\\ \dfrac{a+2}{a+1} < -2\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a+2-2a-2}{a+1} > 0\\ \dfrac{a+2+2a+2}{a+1} < 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\dfrac{a}{a+1} < 0\\ \dfrac{3a+4}{a+1} < 0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}a \in (-1;0)\\ a \in (-\frac{4}{3};-1)\end{array}\right.$.

Ответ: $(-\frac{4}{3};-1) \cup (-1;0)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном общем ходе решения ответ отличается от правильного одной-двумя точками.	15
Правильно получен только один из интервалов ответа.	10
Задача сведена заменой переменной к исследованию квадратного трёхчлена с параметром, но дальнейших продвижений нет или они неверны.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. (20 баллов) Дан треугольник KLM. Проведена окружность, проходящая через точку M, касающаяся отрезка LK в точке A, являющейся его серединой и пересекающая стороны ML и MK в точках C и B, соответственно, так, что $CB = 4$, точка C равноудалена от точек A и L, а $\cos\angle K = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$. Найти длину отрезка BK.

Решение.



$\angle CLA = \angle CAL = \angle CMA = \alpha$, $LA = MA = AK \Rightarrow \Delta LMK$ прямоугольный с $\angle LMK = 90^0$.

Тогда $\angle AMK = 90^0 - \alpha = \angle BAK = \angle BKA = \beta \Rightarrow$

$$CB = 2R = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BK}{\sin\angle K} \Rightarrow KB = CB \cdot \sin\angle K = 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Задача решена верно.	20
Доказано, что $CB-$ диаметр.	15
Доказано, что $\Delta LMK-$ прямоугольный.	10
Доказано, что или $\Delta LAM-$равнобедренный, или $\Delta MAK-$ равнобедренный, или $\Delta ABK-$ равнобедренный.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. (20 баллов) Вычислить значение выражения:

$$1\cdot 2\cdot(1+2)-2\cdot 3\cdot(2+3)+3\cdot 4\cdot(3+4)-\cdots+2019\cdot 2020\cdot(2019+2020).$$

Решение. Докажем методом математической индукции для натуральных n, что:

$$-0\cdot 1\cdot(0+1)+1\cdot 2\cdot(1+2)-2\cdot 3\cdot(2+3)+3\cdot 4\cdot(3+4)-\cdots-$$
$$-(2n-2)\cdot(2n-1)\cdot(4n-3)+(2n-1)\cdot 2n\cdot(4n-1)=$$
$$=(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1).$$

База: n=1 => $-0\cdot 1\cdot(0+1)+1\cdot 2\cdot(1+2)=1\cdot 2\cdot 3$ – верно.

Пусть при n=k – верно, тогда при n=k+1 =>

$$-0\cdot 1\cdot(0+1)+1\cdot 2\cdot(1+2)-2\cdot 3\cdot(2+3)+3\cdot 4\cdot(3+4)-\cdots$$
$$\ldots+(2k-1)\cdot 2k\cdot(4k-1)-$$
$$-2k\cdot(2k+1)\cdot(4k+1)+(2k+1)\cdot(2k+2)\cdot(4k+3)=$$
$$=(2k-1)\cdot 2k\cdot(2k+1)+(2k+1)\cdot\big((2k+2)\cdot(4k+3)-2k\cdot(4k+1)\big)$$
$$=(2k+1)\cdot(4k^2-2k+8k^2+14k+6-8k^2-2k)=(2k+1)\cdot(4k^2+10k+6)=$$
$$=(2k+1)\cdot(2k+2)\cdot(2k+3),$$ утверждение доказано.

Следовательно,

$1\cdot 2\cdot(1+2)-2\cdot 3\cdot(2+3)+3\cdot 4\cdot(3+4)-\cdots+2019\cdot 2020\cdot(2019+2020)=2019\cdot 2020\cdot 2021=2020^3-2020=8000\cdot 101^3-2020=8000\cdot 1030301-2020=8242408000-2020=8242405980.$

Ответ: 8242405980.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
При верном и обоснованном ходе решения имеется арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения, получены некоторые промежуточные результаты (но не доказана формула для $(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)$), дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

Решение варианта № 7

1. (10 баллов) Решить неравенство:

$$2\sqrt{(4x-9)^2}+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\le 18-8x.$$

Решение. Так как $\sqrt{(4x-9)^2}=|4x-9|$, то имеем

$$2|4x-9|+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\le 18-8x. \qquad (1)$$

Левая часть (1) больше или равна 0 как сумма неотрицательных модуля и квадратного корня. Тогда и правая часть (1) тоже будет больше или равна 0, т.е.

$$18-8x\ge 0, x\ge 0 \;\Rightarrow x\;\in\;\left[0;\frac{9}{4}\right]. \qquad (*)$$

Тогда $|4x-9|=9-4x$ и (1) примет вид

$$2(9-4x)+\sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\le 18-8x \Leftrightarrow \sqrt{3\sqrt{x}-5+2|x-2|}\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x}-5+2|x-2|=0. \qquad (2)$$

Замена $\sqrt{x}=t\ge 0,\, x=t^2$.

Уравнение (2) примет вид: $\begin{cases}2|t^2-2|+3t-5=0\\ t\ge 0\end{cases}$.

Рассмотрим два случая:

1.

$$\begin{cases}-2t^2+3t-1=0\\ 0\le t<\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&t=1\\ &t=\frac{1}{2}\end{aligned}\right..$$

2.

$$\begin{cases}2t^2+3t-9=0\\ \sqrt{2}\le t<+\infty\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(t+3)\left(t-\dfrac{3}{2}\right)=0\\ \sqrt{2}\le t<+\infty\end{cases} \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}.$$

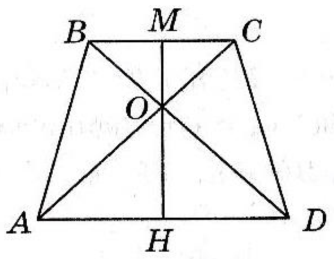
Учитывая (*), вернемся к x: $x=\frac{1}{4};\quad 1;\quad \frac{9}{4}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{4}\right\}\cup\{1\}\cup\left\{\frac{9}{4}\right\}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	10
Получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	10

2. (15 баллов) Площадь равнобедренной трапеции равна 100, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту этой трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ - равнобедренная трапеция, диагонали AC и BD которой взаимно перпендикулярны. Обозначим $O = AC \cap BD$, точка M - середина BC, точка H - середина AD. Проведём отрезок $MH : O \in MH, MH \perp AD$. Так как MH - ось симметрии данной трапеции, то $OB = OC, OA = OD$. Поэтому прямоугольные треугольники BOC и AOD - равнобедренные, значит , $\angle OBM = \angle OAH = 45^o$. Тогда прямоугольные треугольники MOB и AOH также являются равнобедренными: $OM = BM, OH = AH$.



Имеем:

$OM = BM = 0,5BC, OH = AH = 0,5AD \Rightarrow MH = OM + OH = 0,5BC + 0,5AD =$

$= 0,5\left(BC + AD\right)$, то есть высота MH трапеции равна её средней линии. Это значит, что для площади данной трапеции получаем: $S_{ABCD} = 0,5\left(BC + AD\right)MH = MH \cdot MH = MH^2$. Тогда $MH = \sqrt{S_{ABCD}} = \sqrt{100} = 10$.

Ответ: 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	15
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	10
В решении задачи верно выписаны одна-две формулы, являющиеся началом возможного решения.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, описанных выше.	0
Максимальный балл	15

3. (15 баллов). В шляпной коробке 21 шляпка и 18 кепок. Их распределили по двум полкам: на первой должно поместиться 20 предметов, а на второй — 19. После распределения посчитали процент шляпок на каждой полке и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение шляпок на полках, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение. ***Решение 1.*** Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю шляпок — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждая шляпка на полке из 20 предметов составляет $1/20$ от общего числа предметов на этой полке, а на полке из 19 предметов $1/19$ — от общего числа предметов. Значит, если поменять местами шляпки на полке с большим количеством предметов на кепки с полки с меньшим количеством предметов, суммарный процент шляпок на полках вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда полке с меньшим количеством предметов полностью состоит из шляпок, а в полке с большим количеством предметов — 2 шляпки и 18 кепок.

Решение 2.

	Общее число предметов	шляпки	Доля на каждой полке
1 полка	20 штук	x	$x/20$
2 полка	19 штук	21-x	$\left(21-x\right)/19$

Значит, суммарная доля шляпок в двух полках равна $\frac{x}{20}+\frac{21-x}{19}=-\frac{x}{20\cdot 19}+\frac{21}{19}=-\frac{x}{380}+\frac{21}{19}$ и представляет собой линейную функцию с отрицательным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на левом конце промежутка [2; 20], то есть при x=2. Таким образом, на полке с меньшим количеством предметов размещены только шляпки, а на полке с большим количеством предметов — 2 шляпки и 18 кепок.

Ответ: На второй полке — 19 шляпок, на первой — 2 шляпки и 18 кепок.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен правильный ответ.	15
При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.	10
Решено подбором значений переменных, удовлетворяющих условию задачи.	5
Наблюдаются отдельные шаги возможного решения.	2
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	15

4. (20 баллов) Определите количество решений уравнения $a(x-|x|+2)=|x-3|-2$ при каждом значении параметра a.

Решение. Раскроем модули и исследуем отдельно три случая:

1) $x\in(-\infty;0)$ $a(2x+2)=1-x$; $x(2a+1)=1-2a$. При $a=-0,5$ уравнение не имеет решений при этих х, поделим на коэффициент, $x=\frac{1-2a}{1+2a}$. Решим неравенство $\frac{1-2a}{1+2a}<0$; $a\in(-\infty;-0,5)\cup(0,5;+\infty)$ - существует одно решение, $a\in[-0,5;0,5]$ - решений нет.

2) $x\in[0;3]$ $2a=1-x$; $x=1-2a$; $\begin{cases}1-2a\ge 0\\ 1-2a\le 3\end{cases}$; $a\in[-1;0,5]$ - одно решение, $a\in(-\infty;-1)\cup(0,5;+\infty)$ - решений нет.

3) $x\in(3;+\infty)$ $2a=x-5$; $x=2a+5$; $2a+5>3; a>-1$; $a\in(-1;+\infty)$ - одно решение; $a\in(-\infty;-1]$ - решений нет. Обобщая полученные результаты, получим ответ.

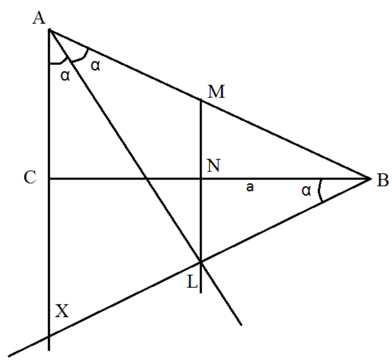
Эту задачу можно решать и графически в системе координат Oxa.

Ответ: При $a\in(-\infty;-1)$ - одно решение; при $a=-1$ - два решения; при $a\in(-1;-0,5)$ - три решения; при $a\in[-0,5;+\infty)$ - два решения.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Ответ отличается от правильного одной-двумя точками (крайними в интервалах или отдельными).	15
Правильно раскрыты модули и исследовано количество решений в каждом из трёх случаев, но сопоставление результатов делается неверно; или к неправильному ответу привела ошибка в одном из случаев раскрытия модуля.	10
Верно раскрыты модули и правильно исследован хотя бы один из случаев, но дальнейшего решения нет или оно неверно.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

5. (20 баллов) В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90^\circ)$ со стороной $BC = a$ точки M и N являются серединами сторон AB и BC, соответственно. Биссектриса $\angle A$ пересекает прямую MN в точке L. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ACL, если угол $\angle CBL = \alpha$.

Решение.



Проведем прямую BL, пересекающую AC в точке X. Тогда в ΔABX биссектриса AL является медианой, следовательно, и высотой. Значит, $\angle ALB = 90^0$ и точки A, B, L, C лежат на одной окружности, следовательно, $\angle CBL = \angle CAL$, как опирающиеся на одну дугу и радиус окружности описанной около ΔCAL равен радиусу окружности около ΔCAB и равен половине AB. Откуда $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$. **Ответ:** $\dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$.

Содержание критерия	Баллы
Задача решена верно.	20
Доказано, что $\angle CBL = \angle CAL$.	15
Доказано, что точки A, B, L, C лежат на одной окружности.	10
Доказано $\angle ALB = 90^0$.	5
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20

6. (20 баллов) Является ли число 390629 простым? Дать обоснованный ответ (без использования калькулятора).

Решение. Так как 25^4 =390625, то

390629 $=25^4 + 4 = 25^4 + 4 + 4 \cdot 25^2 - 4 \cdot 25^2 == (25^2 + 2)^2 - 50^2 = 577 \cdot 677$.

Второй способ.

$390629 \cdot 256 = 10001024 = 10^8 + 2^{10} = 2^8(5^8 + 4)$; $390629 = (5^4 + 2)^2 - 50^2 = 577 \cdot 677$.

Ответ: Нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	20
Получен правильный ответ, но решение недостаточно обосновано.	14
Приведено начало возможного решения задачи, получены некоторые промежуточные результаты, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	6
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	20