Решение варианта № 1

1. Илья берёт тройку чисел и преобразует её по правилу: на каждом шаге каждое число меняется на сумму двух остальных. Чему равна разность между самым большим и самым маленьким числами в тройке на 1989-ом шаге применения этого правила, если изначальная тройка чисел была {70; 61; 20}? Если вопрос задачи допускает несколько вариантов ответа, то укажите их все в виде множества.

Решение:

Обозначим 3 числа, как $\{x;\ x+a;\ x+b\}$, где $0<a<b$. Тогда разность между самым большим и самым маленьким числом на любом шаге, начиная с нулевого шага, будет инвариантом, то есть неизменной и равняться b. b=70-20=50.

Ответ: 50.

2. Две точки движутся по окружности. При движении в одном направлении более быстрая точка догоняет более медленную точку каждые 16 секунд. Если же они будут двигаться в противоположных направлениях с теми же скоростями, то будут встречаться каждые 4 секунды. Известно, что при движении по окружности навстречу друг другу расстояние между сближающимися точками уменьшается на 64 см каждые 2 секунды (до момента встречи). Найдите скорость более быстрой точки (в см/сек).

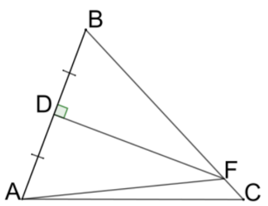
Решение:

Обозначим v – скорость более быстрой точки, u – более медленной. По условию задачи составим системы уравнений: $\begin{cases}(u+v)\cdot 4=(v-u)\cdot 16\\(u+v)\cdot 2=64\end{cases}$; $\begin{cases}3v=5u\\u+v=32\end{cases}$; $\begin{cases}u=12\\v=20\end{cases}$.Скорость более быстрой точки 20 см/сек.

Ответ: 20.

3. В треугольнике ABC сторона BC равна 18*см*. Перпендикуляр DF, проведенный к стороне AB через ее середину – точку D, пересекает сторону BC в точке F. Найдите периметр треугольника AFC, если сторона AC равна 9*см*.

Решение:



Треугольник ABF ($BF = AF$) равнобедренный, так как $DF \perp AB$, D–середина AB. $P_{AFC} = AF + FC + AC = BF + FC + AC = BC + AC = 27$ *см*.

Ответ: 27 см.

4. Имеются контейнеры двух видов: по 27 кг и по 65 кг. Сколько было всего контейнеров первого и второго видов, если груз в контейнерах первого вида превышает груз контейнера второго вида на 34 кг, и количество контейнеров по 65 кг не превышает 44 штук?

Решение:
Пусть x – количество контейнеров по 27кг, y – количество контейнеров по 65кг. Получим уравнение $27x - 65y = 34$.
$27(x-2y) - 11y=34$, обозначим $x-2y=k$ (1)
$27k - 11y=34$
$11(2k- y) +5k=34$, обозначим $2k - y=t$(2)
$11t +5k =34$
$5(2t +k) +t = 34$, обозначим $2t +k=n$(3)
$5n + t = 34$, $t= 34 - 5n$
Подставим в (3), $k= 11n -68$
Подставим в (2), $y= 27n - 170$
Подставим в (1), $x= 65n - 408$
Так как $x > 0$, $0 \le y \le 44$, то $n = 7$. Тогда соответственно $x=47$, $y=19$.
Получилось 47 и 19 контейнеров, всего 66 контейнеров.
Ответ: 66.

5. На выставке собак по жеребьёвке каждой из них достался порядковый номер от 1 до 24. В связи со здоровьем одна из собак не смогла выступить на конкурсе. Оказалось, что среди 23 оставшихся одна имеет номер, равный среднему арифметическому номеров оставшихся собак. Какой порядковый номер имела собака, которая не смогла участвовать в выставке? Если задача имеет не единственное решение, то выпишите в ответ эти номера без пробела в порядке возрастания.
Решение:
Сумма номеров по жеребьёвке, первоначально равная 1+2+3+…+24=300 и уменьшившаяся на зачеркнутое число, заключена в пределах от 300-24=276 до 300-1=299. Она, кроме того, кратна 23, поскольку в 23 раза больше одного из слагаемых. А так, как из чисел 276, 277, 278,…299 только числа 276 и 299 кратны 23, то стёрли либо число 24=300-276, либо 1= 300-299. В обоих случаях среднее арифметическое номеров собак, оставшихся в конкурсе, не совпадает со стёртым числом.
Ответ: 25.

6. Фермер представил на рынке 6 сортов сметаны в бидонах 9,13,17,19,20,38 литров. В первый день он продал сметану из трех бидонов целиком, во второй день еще из двух полностью. При этом объем проданной сметаны в первый день был вдвое больше объема проданной сметаны во второй день. Какие бидоны опустели в первый день? В ответе укажите наибольшую возможную сумму объемов проданной сметаны в первый день.
Решение:
Всего привезли 116 л; 116=3·38+2; поэтому непроданный бидон при делении на 3 дает остаток 2.

1)если 17 л, то 116-17=99, тогда во второй день продали треть от 99=33л, 33=13+20, тогда в первый день продали бидоны емкостью 9,19,38 л, их суммарный объем 66 л.

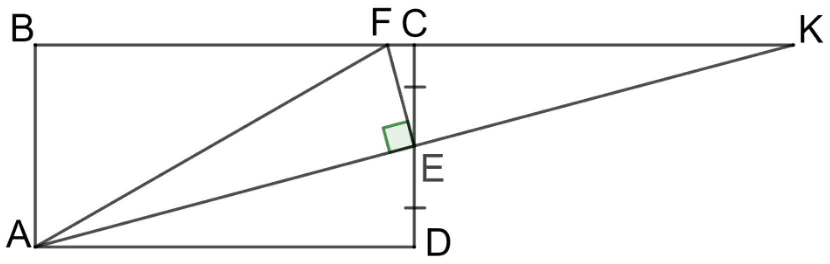
2)если 20 л, то 116-20=96; треть от 96 это 32=13+19, тогда в первый день продали бидоны 9,17,38 л, их суммарный объем на 2 меньше предыдущего;

3)если 38 л бидон не продан, то 116-38=78, две трети от 78-это 52, 52 меньше 66.

Ответ: 66.

7. В прямоугольнике *ABCD* точка *E* является серединой стороны *CD*. На стороне *BC* взяли точку *F* так, что угол *AEF* прямой. Найдите длину отрезка *FC*, если *AF*=9, *BF* = 6.

Решение:



Пусть прямые AE и BC пересекаются в точке К, тогда треугольники AEDиKCE равны ($\angle AED = \angle CED$ как вертикальные, *CE*=*ED*, $\angle ADE = \angle KCE = 90^o$), следовательно, *CK*=*AD*, *AE*=*EK*. Треугольник *AFK* равнобедренный ($FE \perp AK$, *E* – середина *AK*), а, значит, *AF* = *FK* = 7.
Так как *AD* = *CK* и *AD* = *BC*, получаем *BK* = B*F*+*FK* = =2(*BF*+*FC*).
FC = 7,5-6=1,5 *см*.

Ответ: 1,5 см.

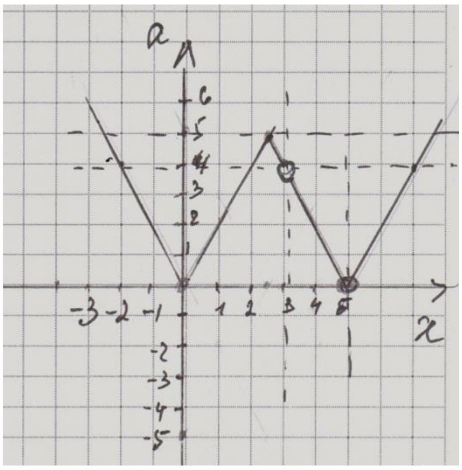
8. В треугольнике *ABC* с $\angle B = 120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1. Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке М. Найти $\angle CBM$.

Решение:
Продолжим сторону AB за точку В, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK .
Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а, значит, и равноудалена от его сторон. Получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C , а, значит, лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$.
В треугольнике BB_1C *M* - точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1, а, значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM = \angle MBC = 30^\circ$

Ответ: $\angle CBM = 30^\circ$.

9. При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ уравнение $|f(x)-5| = p(x)$, если $f(x) = \left|\frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{x^2-3x}{3-x}\right|$, $p(x) = a$ имеет три решения. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их произведение.

Решение:



Упростим $f(x) = \left|\frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{x^2-3x}{3-x}\right|$, получим $f(x) = |2x-5|$, где $x \neq 5$, $x \neq 3$.

Решим уравнение $\big||2x-5|-5\big| = a$, где $x \neq 5$, $x \neq 3$ графически в системе *xOa*.

Уравнение имеет три решения при $a = 4$, $a = 5$.

Произведение равно 20.

Ответ: 20.

Решение варианта № 2

1. Часы показывают 00:00, при этом часовая и минутная стрелки часов совпадают. Считая это совпадение под номером 0, определите, через какой промежуток времени (в минутах) они совпадут в 21 раз. Если ответ не целый, то округлить результат до сотых по правилам округления.

Решение:
Минутная стрелка проходит за час 1 круг, а часовая 1/12 круга, значит скорость их сближения 11/12 круга в час, одно сближение занимает 1/(11/12)=12/11 часа или 720/11 минут. 19 сближений это 21*720/11=15120/11=1374,55 минут.

Ответ: 1374,55.

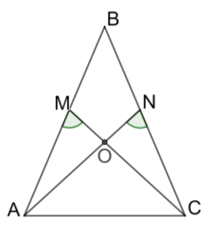
2. Чтобы попасть на дачу семьи Соловьёвых надо сначала идти от станции 3 км по шоссе, а затем 2 км по тропинке. Приехав на станцию, мама позвонила на дачу сыну Васе и попросила встретить её на велосипеде. Движение навстречу друг другу они начали одновременно. Мама всё время идёт с постоянной скоростью 4 км/ч, а Вася по тропинке едет со скоростью 20 км/ч, а по шоссе со скоростью 22 км/ч. На каком расстоянии от станции Вася встретил маму? Ответ дайте в метрах.

Решение:
2 километра по тропинке Вася проехал за 2:20=0,1 часа. За это время мама прошла 4·0,1=0,4 км. После этого Вася и мама стали двигаться навстречу друг другу по шоссе с постоянными скоростями. 3-0,4=2,6 км. Составим уравнение (22+4)·t=2,6; откуда t=0,1 часа. То есть время, через которое встретились мама и Вася равно 0,1+0,1=0,2 часа. За это время мама прошла 4·0,2=0,8 км или 800 метров.

Ответ: 800 м.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $\angle CMA = \angle ANC$. Отрезки MC и AN пересекаются в точке O, причем $ON = OM$. Найдите BC, если AM = 3*см*,BM = 4*см*.

Решение:



Треугольники AMO и CNO равны ($\angle AMO = \angle CNO$, ON=OM, $\angle MOA = \angle NOC$,как вертикальные). Следовательно, AM = NC, $\angle MAO = \angle NCO$ и OA = OC. Получаем, что треугольник AOC равнобедренный, а, значит, углы CAO и ACO равны. Откуда треугольник ABC равнобедренный и AB = BC = 8 *см*.

Ответ: 8 см.

4. Если двузначное число уменьшить на 54, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. В ответе укажите среднее арифметическое получившихся чисел.

Решение:

$\overline{xy} = 10x + y$ - исходное двузначное число, тогда $\overline{yx} = 10y + x$ - число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Получим уравнение $10x + y = 10y + x + 54$.

Из уравнения видно, что двузначное число больше 54. Начнем исследование с числа десятков, равному 6.

x	*уравнение*	*y*	*число*
6	$60 + y = 10y + 6 + 54$	$y = 0$	60 не подходит по условию
7	$70 + y = 10y + 7 + 54$	$y = 1$	71
8	$80 + y = 10y + 8 + 54$	$y = 2$	82
9	$90 + y = 10y + 9 + 54$	$y = 3$	93

Это могут быть числа 71, 82, 93. Среднее арифметическое чисел равно 82.

Ответ: 82.

5. На учебных стрельбах каждый из солдат стрелял по 10 раз. Один из них выполнил задание удачно и выбил 90 очков. Сколько раз он выбил 9 очков, если десяток было 4, а результатами остальных попаданий были семёрки, восьмёрки и девятки. При этом промахов не было ни одного.

Решение:
Так как солдат выбил 90 очков и 40 из них набрал за 4 раза, то за оставшиеся 6 выстрелов он набрал 50 очков. Поскольку солдат попадал только в семерку, восьмерку и девятку, то пусть за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмёрку и девятку) он набрал 24 очка. Тогда за оставшиеся три выстрела он набрал 26 очков, что возможно только при единственной комбинации чисел 7, 8, 9: 8+9+9=26. Таким образом, в семёрку стрелок попал один раз, в восьмёрку два раза, а в девятку – три раза.

Ответ: 3.

6. Игроки делят фишки. Первый игрок берет *m* фишек и шестую часть остатка; второй – *2m* фишек и шестую часть нового остатка; третий – *3m* фишек и шестую часть нового остатка и т.д. Оказалось, что таким образом фишки были разделены поровну. Сколько было игроков?

Решение:

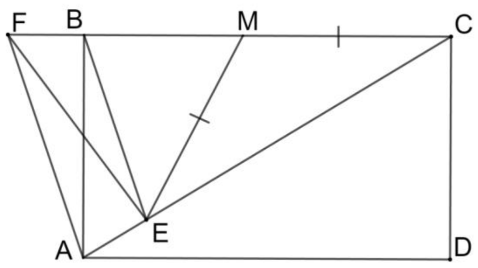
Пусть *x* игроков, *y*—количество фишек у каждого. Последний игрок взял $y=mx$ фишек, причем остатка не было, иначе не выполняется условие о равном разделе. Предпоследний игрок взял $y=(x-1)m$ и шестую часть остатка, причем $\frac{5}{6}$ остатка равно xm; значит, шестая часть остатка равна

$$\frac{xm}{5}; xm = (x-1)m + \frac{xm}{5}; 5m = xm; x = 5.$$

Ответ: 5.

7. В прямоугольнике $ABCD$ точка E расположена на диагонали ACтак, что $BC = EC$, точка M - на стороне BC так, что $EM = MC$. Найдите длину отрезка MC, если BM= 6, AE = 3. Если ответ не целый, то округлить результат до десятых по правилам округления.

Решение:

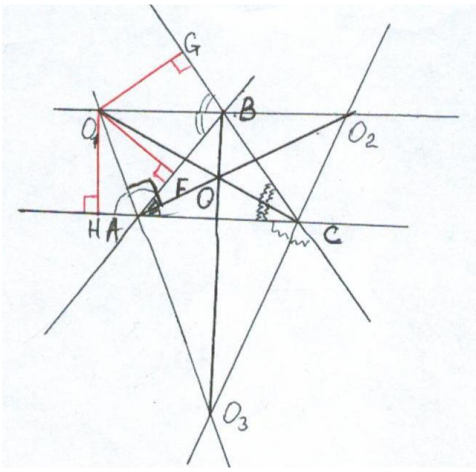


Проведем AF параллельно BE (точка F принадлежит прямой BC), тогда $\angle CBE = \angle CFA$, $\angle CEB = \angle CAF$. Учитывая, что $BC = CE$ получаем, что треугольник FCA равнобедренный, следовательно $FC = AC$ и $FB = AE$. Треугольники FBA и AEF равны, так как $FB = AE$, $\angle AFB = \angle FAE$, AF -общая. Получаем, что $\angle FBA = \angle AEF = 90^o$, откуда $\angle FEC = 90^o$. Треугольник FCE прямоугольный и $MC = ME$, а значит $FM = MC$ и $FM = FB + BM = AE + BM = MC = 9$.

Ответ: 9 см.

8. Дан треугольник ABC. $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Прямые O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 - биссектрисы внешних углов треугольника ABC, как показано на рисунке. Точка O - центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найти угол между прямыми CO_1 и $O_2 O_3$.

Решение:

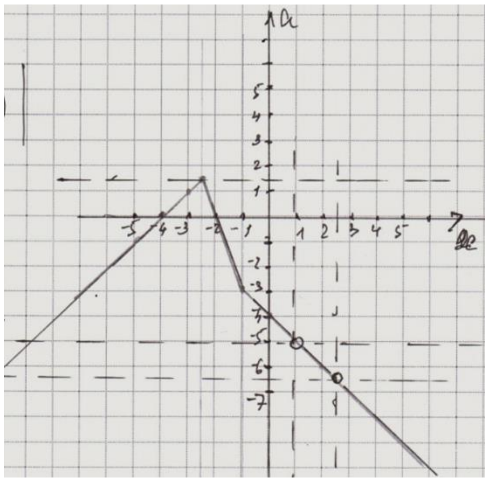


Докажем, что биссектрисы двух внешних углов и одного внутреннего пересекаются в одной точке. Пусть O_1G, O_1H, O_1F – перпендикуляры на BC, AC и AB соответственно. Тогда треугольники AHO_1 и BFO_1, BFO_1 и BGO_1 прямоугольные и равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что $HO_1=GO_1$. Значит, O_1 равноудалена от сторон угла C, то есть CO_1 – биссектриса угла C. Аналогично доказывается, что AO_2 и BO_3 биссектрисы углов A и B. Точка O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Угол O_1AO_2 прямой, так как образован биссектрисами смежных углов. Аналогично прямыми являются углы O_1BO_3 и O_1CO_2, а, следовательно, O - точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$. Значит, CO_1 перпендикулярна $O_2\,O_3$.

Ответ: 90^0.

9. При каких значениях параметра ***a*** уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если $f(x) = \left|\frac{2x^3-5x^2-2x+5}{(1{,}5x-3)^2-(0{,}5x-2)^2}\right|$, $p(x) = |2x+5| + a$. Если значений параметра больше одного, то в ответе укажите их сумму.

Решение:



Упростим $f(x) = \left|\frac{2x^3-5x^2-2x+5}{(1{,}5x-3)^2-(0{,}5x-2)^2}\right|$, получим

$f(x) = |x+1|$, где $x \neq 1$, $x \neq 2{,}5$.

Решим уравнение $|x+1| = |5+2x| + a$, где $x \neq 1$, $x \neq 2{,}5$ графически в системе xOa.

1) $\begin{cases} x < -2{,}5 \\ -x-1 = -2x-5+a \end{cases}$ $\begin{cases} x < -2{,}5 \\ a = x+4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2{,}5 \le x < -1 \\ -x-1 = 2x+5+a \end{cases}$ $\begin{cases} -2{,}5 \le x < -1 \\ a = -3x-6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \ge -1 \\ x+1 = 2x+5+a \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge -1 \\ a = -x-4 \end{cases}$

Уравнение имеет одно решение при $a = -6{,}5$, $a = -5$, $a = 1{,}5$. Сумма равна -10.

Ответ: -10.