Решение варианта № 1

1. (10 баллов). Два научно-производственных предприятия поставляют на рынок субстраты для выращивания орхидей. В субстрате «Орхидея-1» сосновой коры в 3 раза больше, чем песка; торфа в 2 раза больше, чем песка. В субстрате «Орхидея-2» коры в 2 раза меньше, чем торфа; песка в полтора раза больше, чем торфа. В каком отношении надо взять субстраты, чтобы в новый, смешанный состав кора, торф и песок вошли поровну.

Решение. В первый субстрат кора-торф-песок входят в отношении 3:2:1, во второй в отношении 1:2:3. Возьмем а частей первой смеси и в частей второй. Тогда 3а+в=2а+2в =а+3в. Получаем а=в.

Ответ: 1:1.

Баллы	Критерии выставления
10 баллов	Обоснованное решение
5 баллов	При обоснованном решении допущена арифметическая ошибка или решение недостаточно обосновано.
0 баллов	Все остальные случаи

2. (15 баллов). Составьте приведённое квадратное уравнение, у которого корни вдвое больше корней уравнения $2x^2-5x-8=0$.

Решение: По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{5}{2}$, $x_1\cdot x_2=-4$. Пусть t_1 и t_2 - корни искомого квадратного уравнения, тогда $t_1+t_2=2x_1+2x_2=5$, $t_1\cdot t_2=2x_1\cdot 2x_2=-16$ и по теореме обратной теореме Виета получаем уравнение: $x^2-5x-16=0$. Уравнение является приведенным.

Ответ: $x^2-5x-16=0$.

Критерии:

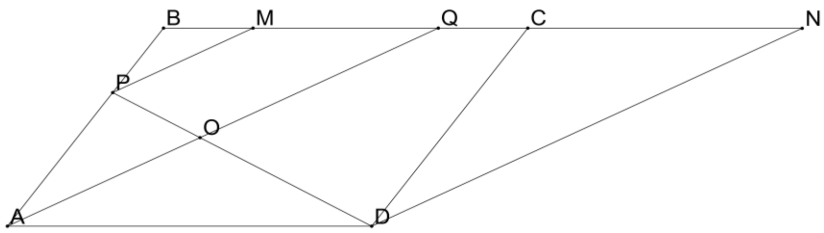
Баллы	Критерии выставления
10	Обоснованно получен правильный ответ
5	Получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

3. (15 баллов). На стороне AB параллелограмма $ABCD$ взята точка P, а на стороне BC – точка Q так, что $3AB = 7BP$, $3BC = 4BQ$. Найдите отношение $DO:OP$, где точка O – точка пересечения отрезков AQ и DP.

Решение

Из равенства $3AB = 7BP$ следует, что $AB = 7x$, $BP = 3x$, где x – коэффициент пропорциональности. Аналогично из $3BC = 4BQ$, следует $BC=4y$, $BQ=3y$. Проведем через точки P и D прямые параллельно AQ и пусть точки M и N – точки пересечения этих прямых с прямой BC. Так как $AQND$ –

параллелограмм, $QN=AD=4y$. Применим дважды теорему Фалеса: $\frac{MQ}{BQ}=\frac{PA}{BA}=\frac{4}{7}$, и значит, $\frac{DO}{OP}=\frac{NQ}{QM}=\frac{7}{3}$.

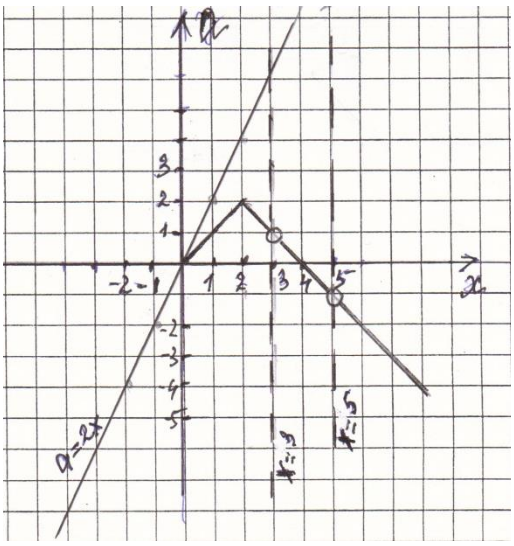


Ответ: $\frac{7}{3}$.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Проведены вспомогательные прямые и найдено отношение длин полученных отрезков, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
5 баллов	Проведена одна из вспомогательных прямых и найдено отношение длин полученных отрезков, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

4. (20 баллов). При каких неотрицательных значениях параметра a уравнение $\left|\frac{x^3-10x^2+31x-30}{x^2-8x+15}\right|=\left(\sqrt{2x-a}\right)^2+2-2x$ имеет одно решение?



Решение.

Преобразуем $\left|\frac{x^3-10x^2+31x-30}{x^2-8x+15}\right|=\left(\sqrt{2x-a}\right)^2+2-2x$

$$\left|\frac{x\left(x^2-10x+25\right)+6(x-5)}{(x-5)(x-3)}\right|=2x-a+2-2x$$

$$\left|\frac{(x-5)(x-3)(x-2)}{(x-5)(x-3)}\right|=2-a$$

Решим графически уравнение $|x-2|=2-a,\quad x\neq 5, x\neq 3,\ a\leq 2x$ в системе xOa.

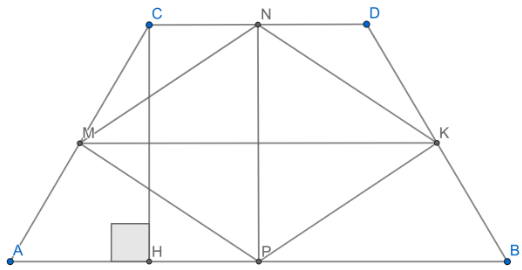
Ответ: при $a=1$, $a=2$.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. (20 баллов). В равнобедренной трапеции ABCD основания BC и AD равны 8 см и 20 см соответственно, а угол BAD равен 60^0. Найдите площадь четырехугольника, соединяющего середины сторон трапеции.

Решение.



1. Рассмотрим четырехугольник MNKP. MN- средняя линия треугольника ABC, KP – средняя линия треугольника ADC, следовательно, $MN \parallel AC \parallel KP$ и $MN = \frac{1}{2}AC = KP$. Так как $MN \parallel KP$ и $MN = KP$, то MNKP параллелограмм по признаку.
2. Аналогично доказывается, что $NK = PM = \frac{1}{2}BD$.
3. Трапеция ABCD равнобедренная. По свойству равнобедренной трапеции AC=BD. Тогда $MN = KP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = NK = PM$. Значит, MNKP - ромб по определению.
4. Проведем MK и ND - диагонали ромба. $S_{MNKP} = \frac{1}{2}NP \cdot MK$.
5. MK – средняя линия трапеции ABCD. Так как N – середина BC, P – середина AD и ABCD - равнобедренная трапеция, то NP - высота трапеции.
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}NP \cdot (BC + AD) = NP \cdot MK = 2S_{MNKP}$.
6. Проведем $BH \perp AD$. Треугольник ABH прямоугольный. По свойству равнобедренной трапеции $AH = \frac{AD-BC}{2} = 6$. $BH = AH \cdot tg60° = 6\sqrt{3}$.
7. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot (8 + 20) = 84\sqrt{3}$, тогда $S_{MNKP} = 42\sqrt{3}$.

Ответ: $42\sqrt{3}$.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Полное обоснованное решение.
15 баллов	Решение в целом верное, но недостаточно обоснованное (например, есть недочеты в доказательстве факта, что MNKP – ромб) ИЛИ при верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано, что MNKP – ромб. Дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

6. (20 баллов). Решите уравнение: $\sqrt{4+2x}+\sqrt{6+3x}+\sqrt{8+4x}=9+\frac{3x}{2}$

Решение: Заметим, что 4+2x=2(2+x); 6+3x=3(2+x); 8+4x=4(2+x), по неравенству о средних левая часть не превосходит (2+2+x+3+2+x+4+2+x)/2=15/2 + 3x/2

Ответ: нет решений.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Любое полное и верное решение
15 баллов	Использовано неравенство о средних, но допущена арифметическая ошибка
5 баллов	Указан только ответ
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Решение варианта № 7

1. (10 баллов) На турбазе число двухкомнатных домиков в 2 раза больше числа однокомнатных. Число трехкомнатных кратно числу однокомнатных. Если число трехкомнатных домов увеличить в 3 раза, то их станет на 25 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего домов на турбазе при условии, что их не меньше 70?

Решение. Пусть однокомнатных домов x, двухкомнатных 2x, трехкомнатных nx.

$3nx-25=2x; x(3n-2)=25; \Rightarrow 25 \vdots (3n-2) \Rightarrow 3n-2=1;5;25$. Если

$3n-2=1; n=1; x=25; 25+50+25=100$ всего домов.

Если 3n–2=5; 3n=7, что невозможно. Если $3n-2=25; 3n=27; n=9; x=1; 1+2+9<70$.

Ответ: 100.

Критерии:

Баллы	Условие выставления
10 баллов	Полное обоснованное решение
5 баллов	Допущена арифметическая ошибка при верном ходе рассуждений или недостаточно обоснованное решение
0 баллов	Неверные рассуждения или записан только ответ.

2. (15 баллов) При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+2a=0$ равна 21?

Решение: По теореме Виета: $x_1+x_2=-a$, $x_1 \cdot x_2=2a$, следовательно, $x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-4a$. Из условия получаем, что $a^2-4a=21$ или $a \in \{-3;7\}$.

Дискриминант уравнения равен $D=a^2-8a$, при $a=7$ он отрицателен, то есть, уравнение не имеет решений, при $a=-3$ у уравнения два корня. Следовательно, ответ $a=-3$.

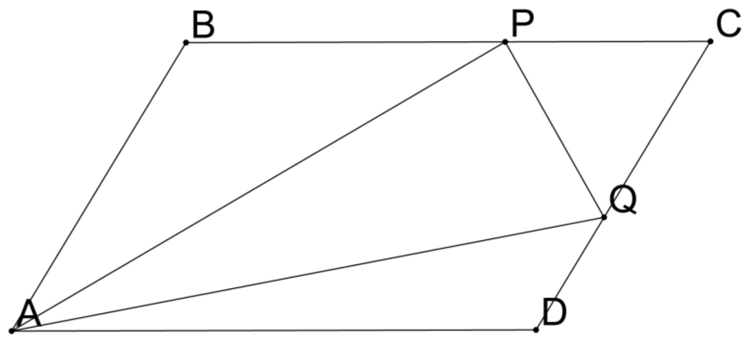
Ответ: $a=-3$.

Критерии:

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
10	Не исследовано количество решений уравнения в зависимости от значения параметра или получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
0	Решение не соответствует ни одному из вышеперечисленных условий

3. (15 баллов) В параллелограмме *ABCD* на стороне *BC* взята точка *P* так, что 3*PB* = 2*PC*, а на стороне *CD* взята точка *Q* так что, 4*CQ* = 5*QD*. Найдите отношение площади треугольника *APQ* к площади треугольника *PQC*.

Решение:



Из равенства $3PB = 2PC$ следует, что $PB = 2x$, $PC = 3$x, где x – коэффициент пропорциональности. Аналогично из $4CQ = 5QD$, следует $CQ=5y$, $DQ=4y$. Площадь параллелограмма делится диагональю пополам, следовательно, $S_{ABC} = S_{ADC} = S_{BCD} = \frac{S}{2}$, где S - площадь параллелограмма. По теореме об отношении площадей треугольников имеющих равные высоты следует, что $S_{ABP} = \frac{2}{5} \cdot \frac{S}{2} = \frac{1}{5}S$. Аналогично $S_{ADQ} = \frac{4}{9} \cdot \frac{S}{2} = \frac{2}{9}S$. По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу $\frac{S_{PQC}}{S_{BCD}} = \frac{PC \cdot CQ}{BC \cdot CD}$. Тогда $S_{PQC} = \frac{1}{2}S$ и $S_{APQ} = S - S_{ABP} - S_{PCQ} - S_{ADQ} = \frac{37}{90}S$.

$\frac{S_{APQ}}{S_{PQC}} = \frac{37}{15}$

Ответ: $\frac{37}{15}$.

Критерии:

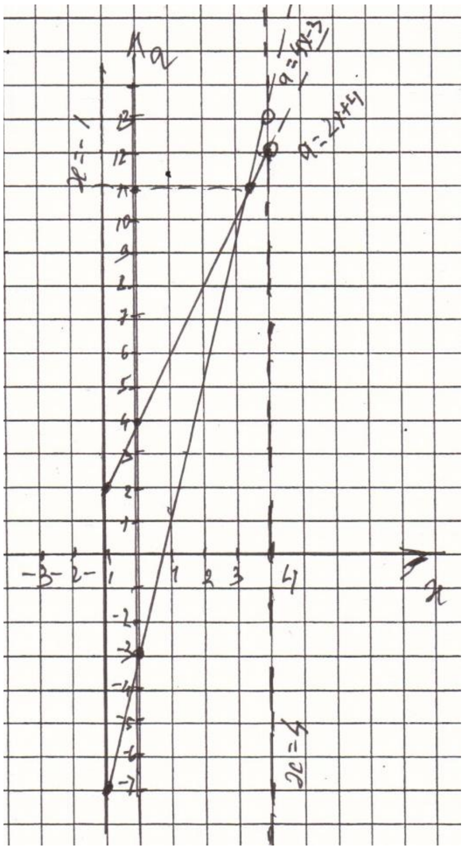
Баллы	Условия выставления
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Правильно найдены площади всех угловых треугольников через площадь параллелограмма, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
5 баллов	Правильно найдены площади двух угловых треугольников через площадь параллелограмма, но дальнейшие действия не выполнены или выполнены неверно.
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям

4. (20 баллов) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2-2xy-y+8x-12)\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x}} = 0 \\ 2x+y-a=0 \end{cases}$$ имеет два решения?

Решение:

Преобразуем $\begin{cases} \frac{(y^2-2xy-y+8x-12)\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x}} = 0 \\ 2x+y-a=0 \end{cases}$



$$\begin{cases} \frac{(y^2-4y-2xy+8x+3y-12)\sqrt{x+1}}{\sqrt{4-x}} = 0 \\ y = a-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-4)(y-2x+3)\sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{4-x} \neq 0 \\ y = a-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2x-4)(a-2x-2x+3)\sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{4-x} \neq 0 \\ y = a-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 2x+4 \\ a = 4x-3 \\ x = -1 \end{array}\right. \\ -1 \le x < 4 \\ y = a-2x \end{cases}$$

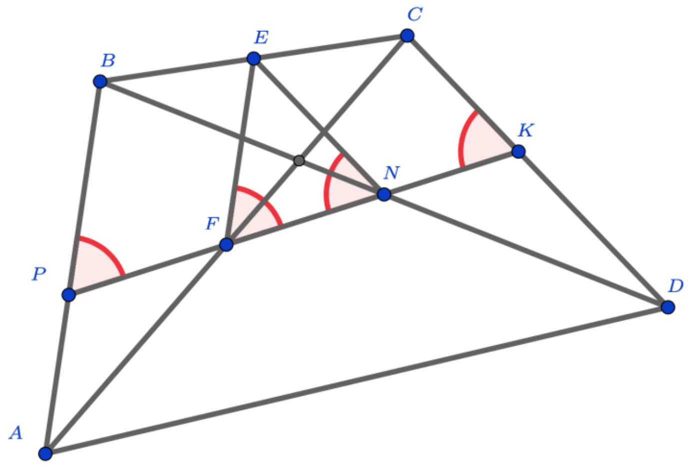
Число решений определим графически.

Ответ: $(-7; 2] \cup \{11\} \cup [12; 13)$.

Критерии:

Баллы	**Условия выставления**
20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. (20 баллов) В выпуклом четырехугольнике ABCD AB=CD. Через середины диагоналей AC и BD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и K. Найдите угол BPK, если угол DKP равен 105^o.



Решение

1. Пусть E – середина стороны BC.
2. Рассмотрим треугольник ABC. AF=FC, BE=EC, следовательно, EF – средняя линия треугольника ABC. По свойству средней линии $EF \parallel AB, EF = \frac{1}{2}AB$. Аналогично в треугольнике DBC EN – средняя линия и $EN \parallel CD, EN = \frac{1}{2}CD$. Так как AB=CD, то EF=EN. Значит, треугольник FEN – равнобедренный.
3. Так как треугольник EFN равнобедренный, то $\angle EFN = \angle ENF$.
4. $EF \parallel AB$, значит, $\angle EFN = \angle BPF$ как соответственные углы. Аналогично $\angle ENF = \angle CKN$. Тогда $\angle CKN = \angle BPK = 180^0 - \angle DKP = 180° - 105° = 75°$. Значит, $\angle BPK = 75^0$.

Ответ: 75^o.

Критерии:

20 баллов	Верное обоснованное решение.
15 баллов	Решение верное, но недостаточно обосновано.
10 баллов	Рассмотрена середина BC, сделаны выводы о средней линии, но дальнейшее решение неверно или отсутствует.
0 баллов.	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

6. (20 баллов) Даша сложила 158 чисел и получила 1580. Затем Серёжа увеличил самое большое из этих чисел в 3 раза, а ещё какое-то число уменьшил на 20. Полученная сумма не изменилась. Найдите самое маленькое из исходных чисел.

Решение:

Пусть x — наибольшее из исходных чисел, а y — то число, которое уменьшил Серёжа. Тогда:
$x + y = 3x + y - 20$, т. е. $x = 10$.

Так как среднее арифметическое исходных чисел равно 10, и самое большое из этих чисел также равно 10, то каждое из данных чисел равно 10.

Ответ: 10.

Критерии:

20 баллов	Любое полное и верное решение.
15 баллов	В целом верное решение, имеющее незначительные недочёты
5 баллов	Найдено наибольшее число.
0 баллов.	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше или указан только ответ.