Решение варианта № 1

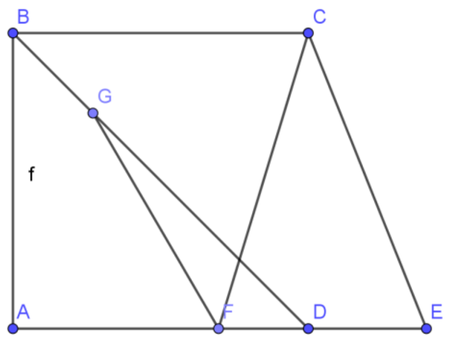
1. Волк увидел косулю в нескольких метрах от себя и погнался за ней по прямой лесной тропе. Прыжок волка на 22% короче прыжка косули. Оба животных прыгают с постоянной скоростью. Все прыжки косули имеют одинаковую длину, прыжки волка тоже равны между собой. Существует промежуток времени, за который и волк и косуля делают по некоторому целому числу прыжков. При этом каждый раз оказывается, что волк сделал на t% прыжков больше, чем косуля. Найдите наибольшее целое значение t, при котором волк не сможет догнать косулю.

Решение: Пусть x – длина прыжка косули, тогда 0,78x – длина прыжка волка; y – число прыжков косули в единицу времени, указанную в условии, $y(1+\frac{t}{100})$ - количество прыжков волка в эту же единицу времени. Волк не сможет догнать косулю, если путь, проходимый косулей в единицу времени -xy – будет всегда больше, чем путь, проходимый волком в эту же единицу времени - $0,78xy(1+\frac{t}{100})$. Составим неравенство: $0,78xy(1+\frac{t}{100})<xy; 1+\frac{t}{100}<\frac{50}{39}; t<\frac{1100}{39}$.

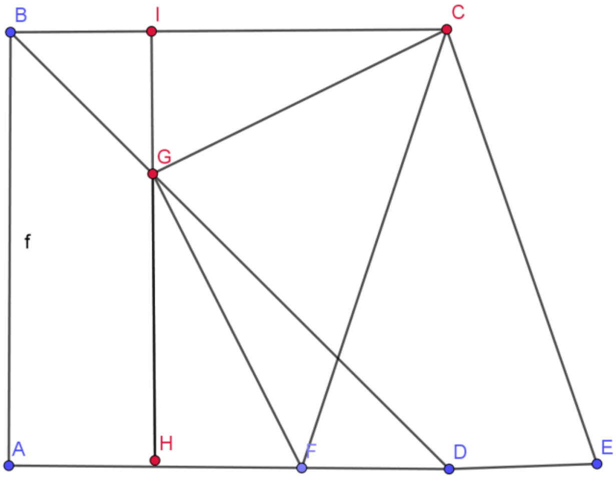
Максимальное значение t, удовлетворяющее этому неравенству, t = 28%.

Ответ: 28.

2. Дана прямоугольная трапеция ABCE, основания которой (BC меньше AE) равны 3 и 4. Меньшая боковая сторона AB=BC. На AE отмечена точка D, так что AD: DE=3:1; на AD отмечена точка F, так что AF: FD =2:1; на BD отмечена точка G, так что BG: GD=1:2. Определите градусную меру угла CFG.



Решение. Построим высоту IH, так что $G \in IH$ и соединим точки C и G.



1) $\blacktriangle IGC = \blacktriangle GFH$ - по двум катетам, так как $IC = GH = 2; = DH = 3;$ $IG = HF = 1;$ поэтому $FG = GC,$ $\angle ICG = \angle FGH = \alpha,$ и $\angle HFG = \angle IGC = 90^0 - \alpha.$

2) $\blacktriangle FGC$ - прямоугольный равнобедренный, так как $FG = FD,$ и $\angle HGF + \angle FGC + \angle IGC = 180^0.$ $\angle FGC = 180^0 - \angle HGF - \angle IGC.$

$\angle FGC = 180^0 - \alpha - 90^0 + \alpha = 90^0.$Значит $\angle GFC = 45^0.$

Ответ: 45.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_{1000} = 75,$ $d = 0,25.$

Вычислить: $99 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{a_{1580} \cdot a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581} \cdot a_{1582}} + \ldots + \frac{1}{a_{2019} \cdot a_{2020}} \right).$

Решение: Выражение в скобке состоит из нескольких слагаемых вида $\frac{1}{x \cdot (x+d)}$, которые можно разложить в сумму простейших дробей: $\frac{1}{x \cdot (x+d)} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+d} \right)$. Преобразуем исходное выражение: $99 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{a_{1580} \cdot a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581} \cdot a_{1582}} + \ldots + \frac{1}{a_{2019} \cdot a_{2020}} \right) =$

$$= 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{1580}} - \frac{1}{a_{1581}} + \frac{1}{a_{1581}} - \frac{1}{a_{1582}} + \ldots + \frac{1}{a_{2019}} - \frac{1}{a_{2020}} \right) =$$

$$= 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{1580}} - \frac{1}{a_{2020}} \right) = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{a_{2020} - a_{1580}}{a_{2020} \cdot a_{1580}} \right) = 99 \cdot 100 \cdot \frac{1}{d}\left(\frac{(2019 - 1579)d}{a_{2020} \cdot a_{1580}} \right) =$$

$$=99\cdot 100\cdot \frac{1}{d}\left(\frac{(2019-1579)d}{a_{2020}\cdot a_{1580}}\right)=99\cdot 100\cdot \frac{1}{d}\cdot \frac{440d}{330\cdot 220}=60,$$

так как $a_{2020}=a_{1000}+1020d=75+1020\cdot 0,25=330$, а

$a_{1580}=a_{1000}+580d=75+580\cdot 0,25=220$.

Ответ: 60.

4. В $\triangle ABC$ с $\angle B=120^0$ проведены биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1.

Отрезок A_1B_1 пересекает биссектрису CC_1 в точке М. Найти угол ΔB_1C_1M.

Решение.

Продолжим сторону AB за точку В, тогда BC биссектриса угла $\angle B_1BK$, а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK.

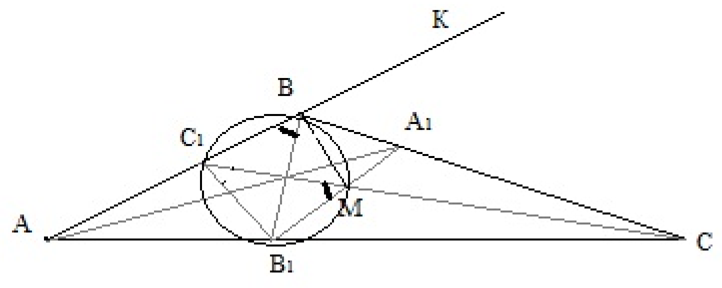
Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе $\angle BAC$, а значит и равноудалена от его сторон, получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C, а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$.

Следовательно $\angle C_1B_1A_1=90^\circ$, как угол между биссектрисами смежных углов.

В $\triangle BB_1C$ M точка пересечения биссектрис B_1A_1 и CC_1, а значит, и BM тоже биссектриса $\angle B_1BC$, следовательно $\angle B_1BM=\angle MBC=30^\circ$.

$\angle ABM=\angle C_1BB_1+\angle B_1BM=60^\circ+30^\circ=90^\circ$, а следовательно вокруг четырехугольника BMB_1C_1 можно описать окружность. Значит $\angle B_1MC_1=\angle B_1BC_1=60^\circ$, как опирающиеся на одну дугу.

Ответ: 60.



5. У двух племен один шаман. Одно племя живет в долине реки, другое - на холме, на склоне горы. В связи с распространением интернета и слухов, шаману пришлось снизить цены на свои услуги. Для племени, живущего в долине, на 10 % «в мехах» и на 15 % « в рыбе». Соотношение цен меха и рыбы на местном рынке постоянно. Для племени на холме цена « в мехах» снизилась на 20%. На сколько процентов снизилась цена услуг «в рыбе» для этого племени? Ответ округлите до десятых после запятой.

Решение. Для племени, живущего в долине,снижение цены в «мехах»: 0,9х; в «рыбе» 0,85х. Соотношение цен на местном рынке постоянно $\frac{0,9}{0,85}=\frac{18}{17}$.Для племени на холме снижение в «мехах» 0,8х, а цена в «рыбе» пусть стала у. $\frac{18}{17}=\frac{0,8x}{y}; y=\frac{0,4x\cdot 17}{9}; (1-\frac{6,8}{9})x=\frac{2,2x}{9}$; снижение в процентах $\frac{2,2x}{9x}\cdot 100\%=\frac{220}{9}=24,4$

Ответ:24,4.

6. Какое наименьшее значение может принимать функция $F(x;y)=6y+8x-9$, при условии, что $x^2+y^2+25=10(x+\text{y})$.

Решение:

$x^2+y^2+25=10(x+\text{y}) \Leftrightarrow (x-5)^2+(y-5)^2=5^2$ – это окружность с центром (5;5) и радиусом 5. Пусть $F(x;y)=\text{M}$, тогда $\text{M}=6y+8x-9$ – это прямая.

Условие минимума функции равносильно условию минимума М, при котором данная прямая будет касательной к окружности. То есть расстояние от центра окружности до прямой равно ее радиусу.

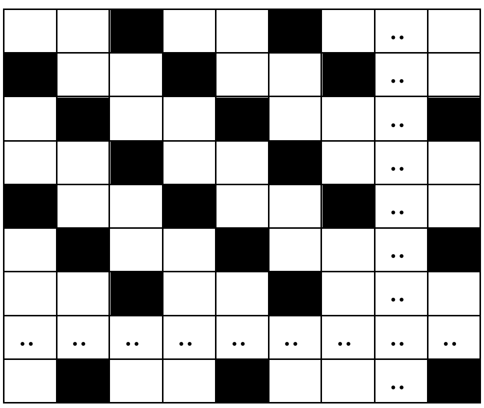
$$\frac{|30+40-9-\text{M}|}{\sqrt{36+64}}=5 => |61-\text{M}|= 50 => \text{M}=11 \text{ или } \text{M}=111.$$

Ответ: 11.

7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 65 клеток (65х65 – всего в квадрате 4225 клеток), чтобы среди любых четырех его клеток, образующих уголок (фигуру «Г»), обязательно была хотя бы одна закрашенная.

Решение.

Закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю (см. рис.). Таким образом, будет закрашено $[\frac{N^2}{3}]$ клеток. Это минимально возможное количество, так как внутри любого квадрата 3х3 нужно закрашивать не менее трех клеток. $\left[\frac{65^2}{3}\right]=1408$.



Ответ: 1408.

8. Найдите сумму всех целых значений с, при которых уравнение 10|p-3|+|2p-|p+c||=6p относительно p имеет хотя бы один корень.

Решение:

Рассмотрим функцию f(r)= 10|p-3|+|2p-|p+c||-6p. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при p. 10>2+1+6. Отсюда следует, что на всех интервалах до p=3 коэффициент линейного приращения отрицателен, а после p=3 - положителен. p=3 - точка минимума. Для того, чтобы уравнение f(p)=0 имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$f(3) \le 0$

$\Rightarrow$ Возьмём |c+3|=t; $|6-t|-18 \le 0$

$(6-t)^2-18^2 \ge 0$

$(24-t)(t+12) \ge 0$

$t \in[-12;24]$

$|c+3| \le 24$

Ответ: -147.

9. Известно, что количество берёз на некоторой делянке смешенного леса составляет от 13% до 14% общего количества деревьев. Найдите минимально возможное общее количество деревьев на этой делянке.

Решение:

Пусть общее количество деревьев L. А количество берёз X. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L, для которого существует такое натуральное число X, что $\frac{13}{100} < \frac{x}{L} < \frac{14}{100}$. Чем меньше X, тем меньше соответствующее L (при малых Xэто действительно так). При X=1 не существует удовлетворяющего системе натурального L. При X=2 находим, решая систему неравенств, что L=15. Из неравенства $L > \frac{100x}{14}$ заключаем, что $L > 15$ при $x \ge 3$.

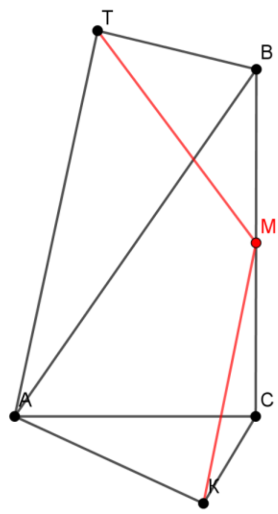
Ответ: 15.

Решение варианта № 2

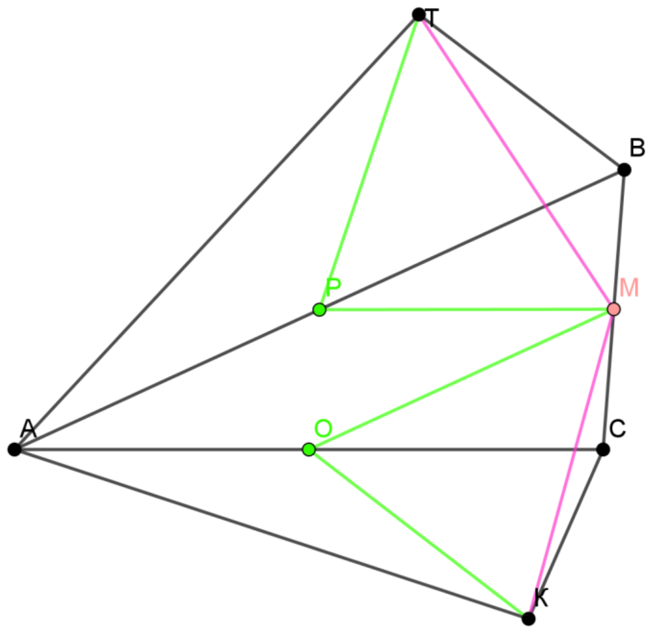
1. Иван Иванович подошёл к источнику с двумя пустыми канистрами; одна вмещала 10 л, а другая – 8 л. Вода из источника текла двумя струями – одна сильнее, другая слабее. Иван Иванович одновременно подставил канистры под струи и, когда набралась половина меньшей канистры, поменял канистры местами. К удивлению Ивана Ивановича, канистры наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды даёт более сильная струя, чем более слабая?

Решение: Пусть в большую канистру налилось х л воды, пока в меньшую 4 л. После перестановки в большую налилось (10 – х) л, пока в меньшую снова 4 л. Так как мощности струй постоянны, отношения объёмов воды, налившейся за одно и то же время, тоже постоянно. Составим уравнение: $\frac{4}{x}=\frac{10-x}{4}$; $x^2-10x+16=0$, которое имеет два корня $x_1=2, x_2=8.$ Два корня уравнения соответствуют двум возможностям: подставить сначала меньшую канистру под более мощную или под более слабую струю. Но в обоих случаях ответ получается один и тот же: одна струя даёт в 2 раза больше воды, чем другая.
Ответ: 2.

2. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC$\left(\angle BCA=90^0\right)$, внешним образом построены прямоугольные треугольники ABT и ACK, так что $\angle ATB=\angle AKC=90^0$, $\angle ABT=\angle ACK=60^0$, на стороне BC выбрана точка M так, что BM=MC. Определите градусную меру угла KMT.



Решение. На серединах сторон АВ и АС отметим точки Р и О соответственно. Соединим Р с М и Т, а О с К и М.



1) $\blacktriangle TPM = \blacktriangle KOM$, по двум сторонам и углу между ними, так как АО= b\2=КО=РМ; АР=с\2=ТР=ОМ; $\angle TPM = \angle TPB + \angle BPM = \angle COK + \angle COM = \angle KOM$, значит ТМ=МК, и $\angle PMT = \angle MKO = \alpha$, $\angle PTM = \angle KMO = \beta$,

2) Найдём сумму углов $\angle PMT$ и $\angle KMO$, $\angle PMT + \angle KMO = \angle MKO + \angle KMO = 180^0 - \angle MOK$. В свою очередь $\angle MOK = \angle KOC + \angle MOC = 60^0 + \angle BAC$.

3) $\angle KMT = \angle PMO + \left(\angle PMT + \angle KMO\right) = \angle BAC + \left(180^0 - \angle MOK\right) \Rightarrow$

$\angle KMT = \angle BAC + 180^0 - 60^0 - \angle BAC = 120^0$.

Ответ: 120.

3. В арифметической прогрессии (a_n) $a_1 = 1$, $d = 4$.

Вычислите $A = \dfrac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}}$.

В ответ запишите наименьшее целое число, большее A.

Решение: Преобразуем выражение, домножив числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$A = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{1579}} + \sqrt{a_{1580}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a_2 - a_1} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{a_3 - a_2} + \ldots + \frac{\sqrt{a_{1580}} - \sqrt{a_{1579}}}{a_{1580} - a_{1579}} =$$

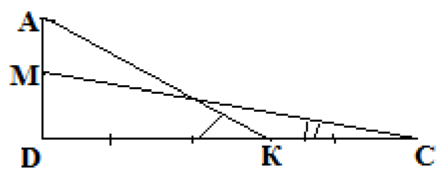
$$=\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}}{d}+\ldots+\frac{\sqrt{a_{1580}}-\sqrt{a_{1579}}}{d}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_{1580}}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{a_1+1579d}-\sqrt{a_1}}{d}=\frac{\sqrt{1+1579\cdot 4}-\sqrt{1}}{4}=\frac{\sqrt{6317}-1}{4}$$

Оцениваем значение A: $19<\frac{\sqrt{6317}-1}{4}<20$, в ответ записываем наименьшее целое число, большее A.

Ответ: 20.

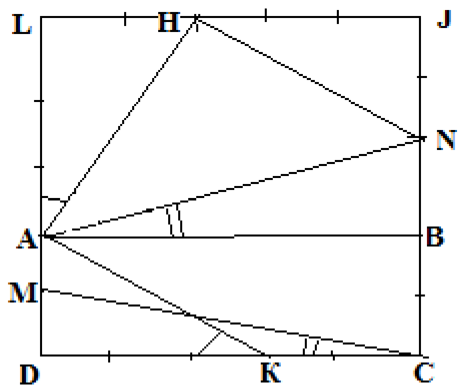
4. Прямоугольные треугольники $\triangle MDC$ и $\triangle ADK$ имеют общий прямой угол $\angle D$. Точка K принадлежит CD и делит ее в отношении 2:3 считая от точки C .Точка M середина стороны AD. Найти сумму $\angle AKD$ и $\angle MCD$, если $AD:CD=2:5$.



Решение

Достроим $\triangle ADC$ до квадрата $LJCD$. Выберем точку H на стороне LJ, такую что $LH:HJ=2:3$, точку N на стороне CJ, такую что $CN:NJ=3:2$ и точку B на стороне CJ, такую что $CB:BJ=2:3$. Тогда $\triangle AHN$ прямоугольный и равнобедренный с $\angle A=45^0$, $\angle LAH=\angle AKD, \angle NAB=\angle MCD$. $\angle LAB=\angle LAH+\angle HAN+\angle NAB=90^0$.

Откуда $\angle LAH+\angle NAB=\angle AKD+\angle MCD=45^0$.



Ответ: 45.

5. В первом сплаве меди и свинца отношение их масс 1:3; во втором сплаве 1:2. Сколько граммов первого сплава надо взять, чтобы получить 10 г нового сплава с отношением масс меди и свинца 3:7?

Решение. Пусть в первом сплаве x г меди и 3x г свинца. Во втором сплаве y г меди и 2y г свинца. Тогда $k\cdot 4x+n\cdot 3y=10; \frac{kx+n\cdot y}{k\cdot 3x+n\cdot 2y}=\frac{3}{7}$; найти нужно $k\cdot 4x$ и $3ny$. Обозначим $ny=b; kx=a$

$.\dfrac{a+b}{3a+2b}=\dfrac{3}{7}\cdot 7a+7b=9a+6b; b=2a$ Используем первое уравнение: $4a+6a=10; a=1; b=2$ Значит, $k\cdot 4x=4; 3ny=6$

Ответ: 4.

6. Для всех неотрицательных значений вещественной переменной x функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+1)+1=f(x)+\frac{20}{(x+1)(x+2)}$. Вычислите $\frac{2019}{f(2019)}$, если $f(0)=2019$.

Решение.

Заметим, что

$\mathrm{f}(x+2019)-f(x)= \big(f(x+2019)-f(x+2018)\big)+\big(f(x+2018)-f(x+2017)\big)+\cdots+\big(f(x+1)-f(x)\big)=\frac{20}{(x+2019)(x+2020)}-1+\frac{20}{(x+2018)(x+2019)}-1+\cdots+\frac{20}{(x+1)(x+2)}-1.$ Таким образом, $f(2019)-f(0)=20\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}+\ \dots\ +\ 1-\frac{1}{2}\right)-2019\ =\ 20\left(1-\frac{1}{2020}\right)-2019.$ Следовательно, $\frac{2019}{f(2019)}=\frac{2020}{20}\ =\ 101.$

Ответ: 101.

7. Какое наименьшее число клеток надо закрасить в квадрате со стороной 65 клеток (65х65 – всего в квадрате 4225 клеток), чтобы из любой незакрашенной его клетки нельзя было попасть ходом шахматного коня в другую незакрашенную.

Решение

Закрашивать надо в шахматном порядке. Таким образом, будет закрашено $[\frac{N^2}{2}]$ клеток. Так как любой «ход коня» приходится на клетку другого цвета, то на клетку такого же цвета хода нет. «Ходом коня» можно обойти любую квадратную таблицу (большую 4х4) так, чтобы конь побывал на каждой ее клетки ровно один раз (см., табл. 5х5). Если пронумеровать эти ходы, то очевидно, что меньше $[\frac{N^2}{2}]$ клеток окрасить нельзя потому, что тогда в этой последовательности обязательно найдутся две подряд неокрашенные, т.е. будет возможен ход с одной из них на другую. Таблицу 35х35 нужно разбить на 169 таблиц 5х5, а нумеровать поочередно, начиная с первой таблицы 5х5. $\left[\frac{65^2}{2}\right]=2112.$

21	16	5	10	23	
6	11	22	17	4	
1	20	15	24	9	26
12	7	18	3	14	
19	2	13	8	25	

Ответ: 2112.

8. Найдите сумму всех целых значений h, при которых уравнение ||r+h|-r|-4r=9|r-3| относительно r имеет не более одного корня.

Решение

Рассмотрим функцию f(r)= 9|r-3|-||r+h|-r|+4r. Коэффициент при первом модуле по модулю больше суммы остальных коэффициентов при r. 9>1+1+4. Отсюда следует, что на всех интервалах до r=3 коэффициент линейного приращения отрицателен, а после r=3 - положителен. r=3 - точка минимума. Для того, чтобы уравнение f(r)=0 имело не более одного корня необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$f(3) \geq 0$

$\Rightarrow$ Возьмём $|h+3|=t$; $12-|t-3| \geq 0$

$(t-3)^2-12^2 \leq 0$

$(t-15)(t+9) \leq 0$

$t \in[-9;15]$

$|h+3| \leq 15$

Ответ: -93.

9. Таблица, состоящая из 1861 строк и 1861 столбцов заполнена натуральными числами от 1 до 1861 так, что в каждой строке присутствуют все числа от 1 до 1861. Найдите сумму чисел, стоящих на диагонали, которая соединяет левый верхний и правый нижний углы таблицы, если заполнение таблицы симметрично относительно этой диагонали.

Решение:

Покажем, что на диагонали присутствуют все числа от 1 до 1861. Пусть число $a \in \{1,2,3...,1861\}$ не стоит на диагонали. Тогда в силу симметрии таблицы, число a встречается чётное количество раз. С другой стороны, так как число a по одному разу встречается в каждой строке, всего в таблице чисел a нечётное количество (1861). Получили противоречие.

Всего на диагонали 1861 клетки, поэтому каждое число из множества $\{1,2,...1861\}$ встретится на диагонали ровно по одному разу. Вычисляя сумму арифметической прогрессии, находим ответ.

Ответ: 1732591.