Решение варианта № 1

1. В 100 емкостях трех типов вместимостью 1 *л*, 10 *л* и 50 *л* разлито 500 литров масла. Сколько потребовалось емкостей каждого типа, если количество масла в каждой емкости соответствует ее вместимости? (12 баллов)

Решение. Пусть n, m, k потребовалось емкостей вместимостью 1 *л*, 10 *л* и 50 *л* соответственно. Тогда $\begin{cases} n+10m+50k=500, \\ n+m+k=100. \end{cases}$ Поскольку $n=500-10m-50k=10(50-m-5k)$, то n делится на 10 нацело, т.е. $n=10l, l\in N, n\le 100, l\le 10.$ $\begin{cases} l+m+5k=50, \\ 10l+m+k=100, \end{cases}$ $\begin{cases} l+m+5k=50, \\ 9l-4k=50, \end{cases}$ $\Rightarrow$ $l=5+(5+4k)/9$, $(5+4k)/9\le 5, (5+4k)/9\in N.$ Отсюда имеем $k\le 10, (5+4k)/9\in N, \Rightarrow$ $k=1, k=10.$ Тогда 1) $k=1, l=6, n=60, m=39;$ 2) $k=10, l=10, n=100, m<0$, нет целых неотрицательных решений.

Ответ: 60 по 1л, 39 по 10 л, 1 по 50 л.

2. Решите неравенство $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{40}{x}+\dfrac{48}{x^2}\ge \dfrac{10|x|}{3}.$ (12 баллов)

Решение. 1) $x>0, \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{40}{x}+\dfrac{48}{x^2}\ge \dfrac{10x}{3},$ $x^2+\dfrac{144}{x^2}\ge 10\left(x-\dfrac{12}{x}\right).$ Сделаем замену $t=x-\dfrac{12}{x},$ $t^2-10t+24\ge 0,$ $t\le 4,$ или $t\ge 6.$ Возвращаемся к переменной x: $x-\dfrac{12}{x}\le 4, \dfrac{x^2-4x-12}{x}\le 0,$ $\dfrac{(x-6)(x+2)}{x}\le 0.$ Учитывая $x>0,$ имеем $x\in(0;6].$ Решаем второе неравенство $x-\dfrac{12}{x}\ge 6, \dfrac{x^2-6x-12}{x}\ge 0, \dfrac{(x-3-\sqrt{21})(x-3+\sqrt{21})}{x}\le 0.$ Учитывая $x>0,$ имеем $x\in[3+\sqrt{21};+\infty).$ Итак, $x\in(0;6]\cup[3+\sqrt{21};+\infty).$

2) $x<0, \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{40}{x}+\dfrac{48}{x^2}\ge -\dfrac{10x}{3},$ $x^2+\dfrac{144}{x^2}\ge -10\left(x+\dfrac{12}{x}\right).$ Сделаем замену $t=x+\dfrac{12}{x}, t^2+10t-24\ge 0,$ $t\le -12,$ или $t\ge 2.$ Возвращаемся к переменной x: $x+\dfrac{12}{x}\le -12, \dfrac{x^2+12x+12}{x}\le 0,$ $\dfrac{(x-6-2\sqrt{6})(x-6+2\sqrt{6})}{x}\le 0.$ Учитывая $x<0,$ имеем $x\in(-\infty;-6-2\sqrt{6}]\cup[-6+2\sqrt{6};0).$ Решаем второе неравенство $x+\dfrac{12}{x}\ge 2, \dfrac{x^2-2x+12}{x}\ge 0.$ Числитель положительный при любом значении x. Неравенство отрицательных решений не имеет. Итак, $x\in(-\infty;-6-2\sqrt{6}]\cup[-6+2\sqrt{6};0).$

Ответ: $x\in(-\infty;-6-2\sqrt{6}]\cup[-6+2\sqrt{6};0)\cup(0;6]\cup[3+\sqrt{21};+\infty).$

3. Наибольший общий делитель двух натуральных чисел a и b равен d. Определите наибольший общий делитель чисел $5a+3b$ и $13a+8b.$ (16 баллов)

Решение. $НОД(5a+3b, 13a+8b)=d_1,\ НОД(a,b)=d,$

$8(5a+3b)\,\vdots\, d_1, 3(13a+8b)\,\vdots\, d_1 \quad \Rightarrow (8(5a+3b)-3(13a+8b))\,\vdots\, d_1 \quad \Rightarrow a\,\vdots\, d_1.$

$13(5a+3b)\,\vdots\, d_1, 5(13a+8b)\,\vdots\, d_1 \quad \Rightarrow (13(5a+3b)-5(13a+8b))\,\vdots\, d_1 \quad \Rightarrow b\,\vdots\, d_1.$

$\Rightarrow \quad d\,\vdots\, d_1.$

Поскольку $a \vdots d$ и $b \vdots d$, то $5a+3b \vdots d$ и $13a+8b \vdots d, \Rightarrow$ $d_1 \vdots d$. Таким образом, $d_1 = d$.

Ответ: d.

4. Найдите все натуральные числа $n \geq 2$, для которых верно равенство $4x_n + 2y_n = 55n^2 + 61n - 116$, где $x_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\cdot n$, $y_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$. (20 баллов)

Решение: Пусть $z_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{(n+1)n}{2} = \dfrac{n^2+n}{2}$. Имеем

$$x_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\cdot n = (2+3+\cdots n) + (3+4+\cdots n) + \cdots((n-1)+n) + n =$$
$$= (z_n - z_1) + (z_n - z_2) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) = (n-1)z_n - (z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1}) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big((n-1)n(n+1) - (1^2 + 1 + 2^2 + 2 + \cdots + (n-1)^2 + (n-1)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\big((n-1)n(n+1) - (y_n + z_{n-1})\big).$$

Подставим полученное выражение в равенство $4x_n + 2y_n = 55n^2 + 61n - 116$. Получаем

$$2\big((n-1)n(n+1) - (y_n + z_{n-1})\big) + 2y_n = 55n^2 + 61n - 116,\ 2(n-1)n(n+1) - n(n-1) = 55n^2 + 61n - 116,$$

$$(n-1)(2n(n+1) - n) = (n-1)(55n + 116),\ 2n^2 - 54n - 116 = 0,\ n^2 - 27n - 58 = 0,\ n = 29.$$

Ответ: $n = 29$.

5. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2y}{3} - \dfrac{|x-1|}{x-1} - 1\right)(y-1) = 0, \\ y = a + \dfrac{|x-1|}{(x-1)(x-y)^2} \end{cases}$$

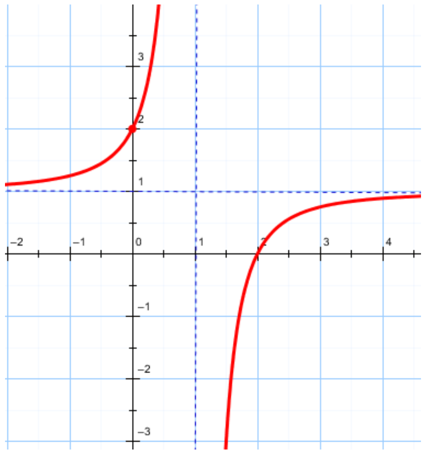
имеет ровно четыре различных решения.

Найдите эти решения при каждом указанном a. (20 баллов)

Решение: 1) $x > 1,\ \begin{cases} \left(\dfrac{2y}{3} - 2\right)(y-1) = 0, \\ y = a + \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3,\ 3 = a + \dfrac{1}{(x-3)^2} \\ y = 1,\ 1 = a + \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3,\ a = 3 - \dfrac{1}{(x-3)^2} \\ y = 1,\ a = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right.$

2) $x < 1,\ \begin{cases} y(y-1) = 0, \\ y = a - \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0,\ 0 = a - \dfrac{1}{x^2} \\ y = 1,\ 1 = a - \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0,\ a = \dfrac{1}{x^2} \\ y = 1,\ a = 1 + \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right.$

I. Если $y=1$, 1) $x>1, a=1-\frac{1}{(x-1)^2}$, 2) $x<1$, $a=1+\frac{1}{(x-1)^2}$.

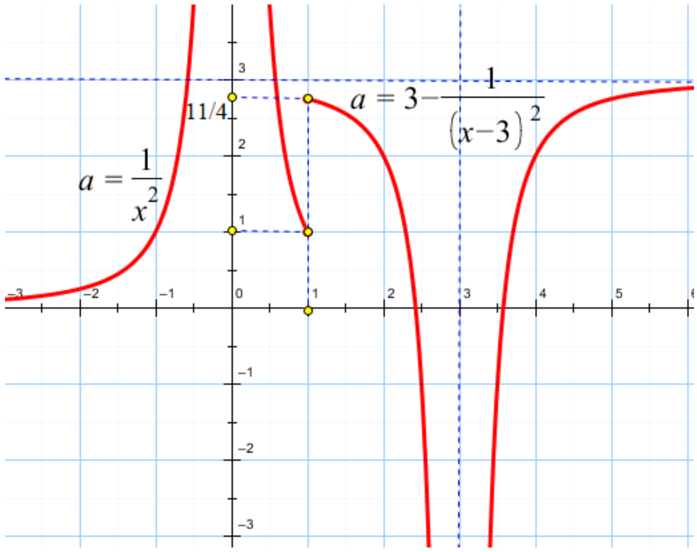


Для любого $a\neq1$, $a<1, x=1+\frac{1}{\sqrt{1-a}}$, $a>1, x=1-\frac{1}{\sqrt{a-1}}$, есть одно решение.

II. Если 1) $y=3$, $x>1, a=3-\frac{1}{(x-3)^2}$, 2) $y=0, x<1$, $a=\frac{1}{x^2}$.

При $a=1$ система имеет три различные решения. При $a\neq1$ нужно выяснить, при каких a система будет иметь три различные решения в случае II. При $a\in(0;1)$ имеем

$y_1=0$, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{a}}$, $y_{2/3}=3$, $x_{2/3}=3\pm\frac{1}{\sqrt{3-a}}$.



При $a\in[11/4;3)$ имеем $y_{1/2}=0$, $x_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$,

$y_3=3$, $x_3=3+\frac{1}{\sqrt{3-a}}$.

Ответ: При $a\in(0;1)$ имеем $y_1=0$, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{a}}$,

$y_{2/3}=3$, $x_{2/3}=3\pm\frac{1}{\sqrt{3-a}}$, $y_4=1$, $x_4=1+\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

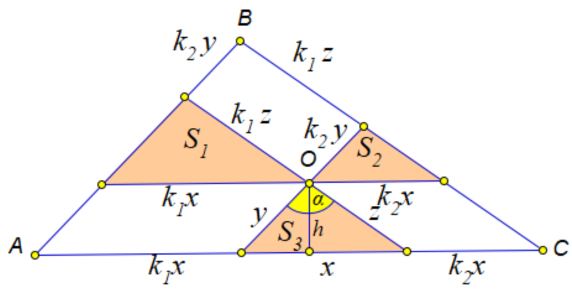
При $a\in[11/4;3)$ имеем $y_{1/2}=0$, $x_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$,

$y_3=3$, $x_3=3+\frac{1}{\sqrt{3-a}}$, $y_4=1$, $x_4=1-\frac{1}{\sqrt{a-1}}$.

6. В треугольнике ABC через произвольную точку O проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате треугольник ABC разбивается на три параллелограмма и три треугольника. Площади получившихся треугольников равны 6 *см*^{2}, 24 *см*^{2}, 54 *см*^{2}. Найдите площадь треугольника ABC.

(20 баллов)

Решение:



Треугольники подобны. Пусть первый и третий подобны с коэффициентом подобия k_1, второй и третий с коэффициентом подобия k_2. Тогда для площадей этих треугольников имеем соотношения $\frac{S_1}{S_3}=k_1^2, \frac{S_2}{S_3}=k_2^2$.

Площади параллелограммов выражаются следующим образом: $S_{1p}=k_1xh=2k_1S_3,\ S_{2p}=k_2xh=2k_2S_3,\ S_{3p}=k_1k_2yz\sin\alpha=2k_1k_2S_3.$

$$S_{ABC}=S_1+S_2+S_3+2(k_1+k_2+k_1k_2)S_3=S_1+S_2+S_3+2\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_3}}+\sqrt{\frac{S_2}{S_3}}+\frac{\sqrt{S_1S_2}}{S_3}\right)S_3=$$

$$=S_1+S_2+S_3+2\sqrt{S_1S_3}+2\sqrt{S_2S_3}+2\sqrt{S_1S_2}=6+24+54+2\sqrt{6\cdot54}+2\sqrt{24\cdot54}+2\sqrt{6\cdot24}=216.$$

Ответ: 216.

Решение варианта № 2

1. Клоун ездит по арене цирка на велосипеде, у которого радиус окружности переднего колеса вдвое меньше радиуса окружности заднего колеса. Если бы длину окружности переднего колеса увеличили на метр, а заднего уменьшили на метр, то на протяжении 40 м заднее колесо сделало бы на 20 оборотов больше переднего колеса. Определите длину окружностей колес. (12 баллов)

Решение. Длина окружности переднего колеса $C_n = 2\pi R_n,$ заднего - $C_z = 2\pi R_z = 2\pi 2R_n,$ количество оборотов после изменений длин окружностей связаны соотношением

$$\frac{40}{C_z - 1} - 20 = \frac{40}{C_n + 1} \;\Rightarrow\; \frac{2}{2C_n - 1} - 1 = \frac{2}{C_n + 1} \;\Rightarrow\; 2C_n{}^2 + 3C_n - 5 = 0 \;\Rightarrow\; C_n = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -10/4 < 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow C_n = 1, C_z = 2.$$

Ответ: 1; 2.

2. Сравните два числа: $A = \dfrac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} ... + \sqrt{2}}}}_{n}}{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n-1}}$ и $\dfrac{1}{4}$. (12 баллов)

Решение и ответ. $A = \dfrac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} ... + \sqrt{2}}}}_{n}}{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n-1}} = \dfrac{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2} ... + \sqrt{2}}}}_{n}}{\left(2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n}\right)\left(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n}\right)} =$

$$= \frac{1}{\left(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n}\right)} > \frac{1}{4}, \quad n \geq 1$$

3. Школьникам раздали 7 листов бумаги и попросили разрезать некоторые из них на 7 частей. Полученные кусочки бумаги перемешали и опять попросили некоторые из них разрезать на 7 частей. Так повторилось несколько раз. Сколько кусков бумаги надо разрезать, чтобы в итоге получился 331 кусок. (16 баллов)

Решение. После k разрезаний остается $6k+7$ кусочков. Поэтому для определения количества разрезанных кусков решим уравнение $6k + 7 = 331 \quad \Rightarrow \quad k = 54.$

Ответ: 54.

4. Решите уравнение $10x - 6 + x^2 = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{36 + (x+4)^2}$ (20 баллов)

Решение. Преобразуем уравнение $10x - 6 + x^2 = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{36 + (x+4)^2}$

$$10x - 6 + x^2 = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{36 + (x+4)^2} \quad \Rightarrow \quad 6x - 6 + x^2 + 4x = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} \cdot \sqrt{6^2 + (x+4)^2},$$

Это уравнение можно интерпретировать как скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x-1, x), \quad \vec{b} = (6, x+4)$, записанное двумя способами - сумма произведений соответствующих координат и произведение длин векторов на косинус угла между ними, который в данном случае равен 1. Косинус равен единице, если вектора сонаправлены, т.е. их координаты пропорциональны

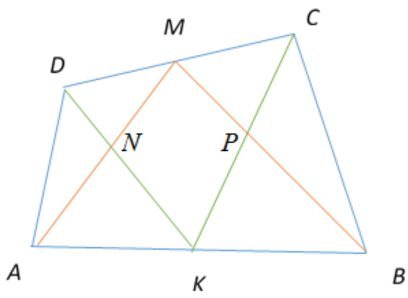
$$\frac{x-1}{6}=\frac{x}{x+4} \quad \Rightarrow \quad x^2+3x-4=6x \quad \Rightarrow \quad x^2-3x-4=0 \;\Rightarrow\; x=\left[\begin{array}{l}-1\\ 4\end{array}\right.$$, но $x=-1$ лишний корень.

Ответ: 4.

5. Дан произвольный выпуклый четырехугольник *ABCD*. Точки *K* и *M* середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Точка *P* - точка пересечения линий *KC* и *BM,* точка *N* – пересечение *AM* и *KD.* Найдите площадь четырехугольника *KPNM* , если углы *CBP* и *NDA* равны 30 градусам, $BPC-105^0$, DAN- 15^0. $BP=2\sqrt{2},\ ND=\sqrt{3}.$ (20 баллов)

Решение и ответ.

$$S_{KPMN}=S_{AMB}-S_{ANK}-S_{KPB}=S_{ADK}+S_{KCB}-S_{ANK}-S_{KPB}=S_{ADN}+S_{PCB}$$



По теореме синусов

$$\frac{AN}{\sin 30}=\frac{ND}{\sin 15} \quad \Rightarrow \quad AN=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2} \;\Rightarrow$$

$$S_{AND}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2}\sin 135=\frac{1}{2}\sqrt{3}\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{2}\cos 45=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Аналогично $\frac{CB}{\sin 105}=\frac{PB}{\sin 45} \quad \Rightarrow \quad BC=2\sqrt{2}\cos 15\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{4(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} \;\Rightarrow$

$$S_{CPB}=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}\sin 105=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{1}\cos 45=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$S_{KPMN}=\frac{3(\sqrt{3}+1)}{4}+\frac{4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{(\sqrt{3}+1)(4\sqrt{2}+3)}{4}$$

6. При каких значениях параметра a корни x_1 , x_2 уравнения $x^2-2ax-\frac{1}{a^2}=0$ удовлетворяют равенству $x_1^4+x_2^4=16+8\sqrt{2}$? (20 баллов)

Решение. Воспользуемся теоремой Виета: $x_1x_2=-\frac{1}{2a^2}$, $x_1+x_2=2a,$ выразим сумму четвертых степеней:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1+x_2)^4-4x_1x_2((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)-6x_1^2x_2^2=16a^4-4(-\frac{1}{a^2})4a^2+2(-\frac{1}{a^2})^2$$

$$=16a^4+16+\frac{2}{a^4}=16+8\sqrt{2} \;\Rightarrow\; 16a^8-8\sqrt{2}a^4+2=0 \;\Rightarrow\; (2\sqrt{2}a^4-1)^2=0$$

Ответ: $a=\pm\sqrt[8]{1/8}.$