Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика), осень 2018 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Фермер первоначально разместил свою продукцию в ящики вместимостью по 8 кг, но один ящик оказался загруженным не полностью. Тогда всю продукцию фермер переложил в ящики вместимостью по 6 кг, однако понадобилось на 8 ящиков больше, но и в этом случае один ящик оказался загруженным не полностью. Когда же всю продукцию разместили в ящики по 5 кг, то все ящики оказались загруженными полностью, но при этом понадобилось дополнительно еще 5 ящиков. Сколько килограммов весила продукция фермера? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $8\sin^4(\pi x)-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos(4\pi x)$. В ответе укажите сумму корней, принадлежащих отрезку $[-1;2]$. (5 баллов)

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (10; 5; 10) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\sqrt{1-(2x+y)^2}$.

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

4. В стране Ландия, разводящей элитную породу лошадей, ежегодно проводится фестиваль по проверке их резвости, в котором могут участвовать только однолетние, двухлетние, трехлетние и четырехлетние скакуны. За каждую лошадь, выполнившую норматив резвости, организаторы фестиваля выплачивают конезаводу, на котором выращена лошадь, фиксированную сумму денег: за однолетку – 1 ландрик, за двухлетку – 2 ландрика, за трехлетку – 3 ландрика и за четырехлетку – 4 ландрика. Каждый конезавод, участвующий в фестивале, выставляет на испытание ежегодно четырех новых лошадей (любого сочетания возрастов по своему желанию), ранее не участвовавшие в испытаниях, а также персонально всех лошадей (не старше четырех лет), которые ранее в более молодом возрасте участвовали в испытаниях и выполняли норматив. Какую максимальную сумму денег может заработать конезавод за первые шесть лет своего участия в фестивале? (12 баллов)

5. Число N записано в виде произведения последовательных натуральных чисел от 2019 до 4036: $N = 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot \ldots \cdot 4034 \cdot 4035 \cdot 4036$. Определите, в какой степени будет стоять двойка в разложении числа N на простые множители. (12 баллов)

6. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, гипотенуза которого лежит на касательной к графику функции $y = \sqrt{x-3}$, катет – на оси y, а одна из вершин совпадает с точкой касания? (12 баллов)

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны AC равна $1+\sqrt{3}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек A и C равны $\sqrt{2}$ и 2, соответственно. Найдите длину стороны AB. (16 баллов)

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = \dfrac{|x|-1}{|x+1|} - 2, \\ 4|x-1{,}5-a| + |y-1-2a| = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

9. Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем $AB = 9/2$. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB, проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT = 1:2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{2/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления. (16 баллов)

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика), осень 2018 г.

11 класс

Вариант № 2

1. Сосуд емкостью 10 л наполнен воздухом, содержащим 24% кислорода. Из сосуда откачали некоторый объем воздуха и добавили такой же объем аргона, после чего откачали такой же, как в первый раз, объем смеси и опять дополнили таким же объемом аргона. В новой смеси оказалось 11,76% кислорода. Сколько литров смеси выпускалось каждый раз из сосуда? Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\cos(\pi x^2)-\cos^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)+1+\cos(\pi x^2-4\pi x)=\sin^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$. В ответе укажите третий член возрастающей последовательности всех положительных корней уравнения. (5 баллов)

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (5; 10; 13) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)\geq 4{,}5\sqrt[4]{1-(2y+x)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

4. Сколькими способами прямоугольную доску размера 2×18 можно покрыть одинаковыми прямоугольными плитками размера 1×2? Плитки должны быть уложены так, чтобы они целиком помещались на доске и не перекрывались. (12 баллов)

5. Определите наименьшее натуральное число N, среди делителей которого имеются все числа вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $6xy-y^2-5x^2=7$. (12 баллов)

6. Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с началом координат, другая лежит на кривой $x^2 + y^2 = 2(x + y)$, а вершина прямого угла расположена на прямой $y = x$? В ответ запишите квадрат найденной площади. (12 баллов)

7. В треугольнике *ABC* проведены высоты *AD*, *BE*, *CF*. Длина стороны *AC* равна $\sqrt{6} + \sqrt{2}$. Расстояния от центра вписанной в треугольник *DEF* окружности до точек A и C равны 2 и $2\sqrt{2}$, соответственно. Найдите радиус описанной около треугольника *DEF* окружности. (16 баллов)

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y| + |x-y-2a| = 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a.
(16 баллов)

9. Дана правильная четырехугольная пирамида *TABCD* с основанием *ABCD*, причем *AB* = 9/2. На ее высоте *TO* выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки *OA*, *OB*, *OC* и *OD*, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки *O*. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане *AK* боковой грани *TAB*, проходящей через середину ребра *TC* и точку *F* отрезка *TA* такую, что $AF:FT = 1:2$, если известно, что расстояние от точки *B* до этой плоскости сечения равно $8\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления.
(16 баллов)

Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика), осень 2018 г.

11 класс

Вариант № 3

1. Из пункта *A* круговой трассы одновременно и в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль проехал два круга без остановок в одном направлении. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно и увеличил скорость на 16 *км/ч*, через 3/8 *ч* после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт *A*. Найдите весь путь (в *км*) мотоциклиста, если этот путь на 5,25 *км* короче всего шоссе. Ответ дайте в виде числа без указания размерности. (5 баллов)

2. Решите уравнение $\left|2|x-1|-3|x+2|+2|x+4|-|x-2|\right|=x^2+x+4,25$. В ответ запишите сумму корней уравнения. (5 баллов)

3. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (7; 3; 6) до точки, координаты которой положительны и удовлетворяют неравенству

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)\geq 9\sqrt{1-(2z+y)^2}.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния. (6 баллов)

4. Даны 2019 неразличимых по виду монет. Все монеты имеют одинаковую массу, за исключением одной, более легкой. За какое наименьшее число взвешиваний можно гарантированно найти более легкую монету при помощи чашечных весов без гирь? (12 баллов)

5. Найдите сумму всех чисел вида $x+y$, где x и y являются натуральными решениями уравнения $5x+17y=307$. (12 баллов)

6. Какую наименьшую длину может иметь отрезок *AB*, если точка *A* принадлежит кривой $10(x^2+y^2)+60x-80y+249=0$, а точка B — графику функции $y=\frac{1}{3}|x|$? В ответ запишите квадрат найденной длины. (12 баллов)

7. В треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Длина стороны BC равна 6. Расстояния от центра вписанной в треугольник DEF окружности до точек B и C равны $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ и $2\sqrt{6}$, соответственно. Найдите высоту треугольника DEF, проведенную к стороне DE.

(16 баллов)

8. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{|x|-1}, \\ |x+y+a|+|x-y-a|=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответе укажите наименьшее среди всех полученных значение параметра a. (16 баллов)

9. Дана правильная четырехугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причем $AB = 9/2$. На ее высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1, B_1, C_1 и D_1 делят отрезки OA, OB, OC и OD, соответственно, в отношении $1:2$, считая от точки O. Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB, проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF:FT=1:2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{5/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления.

(16 баллов)