«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана
А.А. Александров
« » 2019 г.

Заключительный этап академического соревнования Олимпиады школьников

«Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика)

Типовой вариант задания для 11 класса

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении. (12 баллов)

2. Решите уравнение $\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$. (12 баллов)

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819\cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (16 баллов)

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна $0{,}5$. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK=3$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC=15$. (20 баллов)

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_{|x+3|}(ax+4a)=2\log_{|x+3|}(x+y),\\ x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4}=0\end{cases}$$

имеет два различных решения, и найдите эти решения при каждом a. (20 баллов)

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна 21, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$. (20 баллов)

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика), весна 2019 г.

11 класс

Вариант № 1

1. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 1, красный – 5, оранжевый – 13, желтый – 19, зеленый – 23, голубой – 53, синий – 55, фиолетовый – 83, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n \leq 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n-2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n \geq 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель? (12 баллов)

2. Решите неравенство $\sqrt{3}\operatorname{tg} x-\sqrt[4]{\sin y}-\sqrt{\frac{3}{\cos^2 x}+\sqrt{\sin y}-6} \geq \sqrt{3}.$ (12 баллов)

3. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1) a^2+4a+3 делится на b; 2) $a^2+ab-6b^2-2a-16b-8=0$;

3) $a+2b+1$ делится на 4; 4) $a+6b+1$ - простое число

три истинны, а одно ложно. (16 баллов)

4. В треугольнике ABC с углом A, равным 60°, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $2\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка BM, где M - точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB=1$. (20 баллов)

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_2 \frac{3\sqrt{3}+(\sin x+4)\cos a}{3\sin a\cos x}=|3\sin a\cos x|-\left|(\sin x+4)\cos a+3\sqrt{3}\right|.$ (20 баллов)

6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через центр сферы, описанной около пирамиды, образующей с плоскостью основания угол $60°$, пересекающей ребро AB в точке M, так что $MB = 2AM$, и пересекающей ребро BC. Известно, что расстояние от точки A до плоскости сечения равно 0,25.

(20 баллов)

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика), весна 2019 г.

11 класс

Вариант № 6

1. Найдите натуральное число, которое имеет шесть натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 78.

(12 баллов)

2. Найдите все натуральные значения n, при которых $\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cdots+\cos\frac{2\pi n}{9}=\cos\frac{\pi}{9}$, и $\log_3^2 n+14<\log_3 9n^7$.

(12 баллов)

3. Найдите множество значений функции $y=f^{[2019]}(x)$, где $f(x)=\log_{0,5}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right)$, $f^{[n]}(x)=\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n. (16 баллов)

4. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 2 и 3, углы A и D острые. Биссектрисы углов A и B трапеции пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке N. Длина отрезка MN равна 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если площадь трапеции $ABCD$ равна $26\sqrt{2}/3$. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(2\sin x+a^2+a)^3-(\cos 2x+3a\sin x+11)^3=12-2\sin^2 x+(3a-2)\sin x-a^2-a$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Укажите эти решения для каждого найденного a. (20 баллов)

6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 3, а высота пирамиды, равная $\sqrt{3}$, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол $60°$. (20 баллов)

Решение варианта №6 (11 класс)

1. Найдите натуральное число, которое имеет шесть натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 78.

Решение: Искомое натуральное число n представимо в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$, $1 < p_1 < p_2$, p_1, p_2 - простые, причем $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 6$ (число всех делителей равно 6). Учитывая, что каждый из натуральных сомножителей в последнем равенстве не меньше 2, имеем два возможных случая: 1) $\alpha_1 + 1 = 2, \alpha_2 + 1 = 3$, или $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$, 2) $\alpha_1 + 1 = 3, \alpha_2 + 1 = 2$, или $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$.

1) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$, $n = p_1 \cdot p_2^2$. Поскольку сумма всех делителей равна 78, то $(1 + p_1)(1 + p_2 + p_2^2) = 78$. Поскольку p_1, p_2 - простые числа, $1 < p_1 < p_2$, то $1 + p_1 > 2$, $1 + p_2 + p_2^2 > 7$, то ни одно разложение числа 78 на произведение двух натуральных сомножителей не подходит ($78 = 1 \cdot 78, 78 = 2 \cdot 39, 78 = 3 \cdot 26, 78 = 6 \cdot 13$ с точностью до порядка).

2) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$, $n = p_1^2 \cdot p_2$. Поскольку сумма всех делителей равна 78, то $(1 + p_1 + p_1^2)(1 + p_2) = 78$. Поскольку $1 < p_1 < p_2$, то $1 + p_2 > 3$, $1 + p_1 + p_1^2 > 3$, то имеем

а) $1 + p_1 + p_1^2 = 6, 1 + p_2 = 13,$ натуральных решений нет.

б) $1 + p_1 + p_1^2 = 13, 1 + p_2 = 6,$ или $p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ n = 3^2 \cdot 5 = 45.$

Ответ: 45.

2. Найдите все натуральные значения n, при которых $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{9} = \cos\frac{\pi}{9}$, и $\log_3^2 n + 14 < \log_3 9n^7$.

Решение: $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{9} = \cos\frac{\pi}{9} \quad \Leftrightarrow$

$$2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} + 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi n}{9} = 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} \quad \Leftrightarrow$$

Второй (очный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика), весна 2019 г.

11 класс

Вариант № 11

1. В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально? (12 баллов)

2. Решите неравенство $4\sin x-\sqrt{\cos y}-\sqrt{\cos y-16\cos^2 x+12}\geq 2.$ (12 баллов)

3. Найдите множество значений функции $y=f^{[2019]}(x),$ где $f(x)=\log_4\dfrac{\cos 2x-2\cos^2 x}{\cos x-1}$, $f^{[n]}(x)=\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n. (16 баллов)

4. В равнобедренном треугольнике ABC с снованием AC, боковая сторона AB равна 2, отрезок AD является биссектрисой. Через точку D проведена касательная DH к окружности, описанной около треугольника ADB, точка H лежит на стороне AC. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD=\sqrt{2}\,CH$. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$(\cos 2x+14\cos x-14a)^7-(6a\cos x-4a^2-1)^7=(6a-14)\cos x+2\sin^2 x-4a^2+14a-2$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

(20 баллов)

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра TA и параллельной медиане AD боковой грани ATC, если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3:1, считая от вершины. (20 баллов)