Первый (заочный) онлайн-этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по профилю «Компьютерное моделирование» (Математика), осень 2018 г.

8 класс

1) Миша играл по одной партии в нарды либо с мамой, либо с папой. У мамы он всегда выигрывал, а у папы - ему удавалось выиграть в 1 случае из 5. За год Мише удалось выиграть ровно половину партий. Какую долю партий он играл с мамой? При необходимости ответ округлите до тысячных.

Ответ: 0,375.

Решение: Пусть за год Миша сыграл с мамой x (т.е. выиграл у мамы) и выиграл у папы y партий. Тогда всего партий было x+5y. По условию, (x+y)/(x+5y) = 1/2, откуда x=3y. Доля сыгранных с мамой партий составляет x/(x+5y) = 3y/(3y+5y) = 3/8.

2) В ящике лежат 222 носка: желтые, синие, чёрные и белые. Известно, что если, не заглядывая в ящик, вытащить 200, то среди них обязательно найдутся четыре носка различных цветов. Какое наименьшее число носков нужно вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка нашлись три носка различных цветов?

Ответ: 177.

Решение: Носков каждого цвета не меньше 23 (иначе все они могут оказаться среди 22 оставшихся в ящике). Значит, носков двух цветов не больше 222 – 46 = 176. Следовательно, среди любых 177 носков, будут носки по крайней мере трёх цветов. 176 шариков недостаточно, например, для распределения цветов 153, 23, 23, 23.

3) Построить график функции $f(x) = \left|\left|\frac{x^2+x}{x+1} - \frac{x^2-8x+16}{4-x}\right| - 4\right|$. При каких значениях параметра *a* уравнение *f(x)=a* имеет три решения? В ответе укажите сумму искомых значений параметра.

Ответ: 6.

Решение:

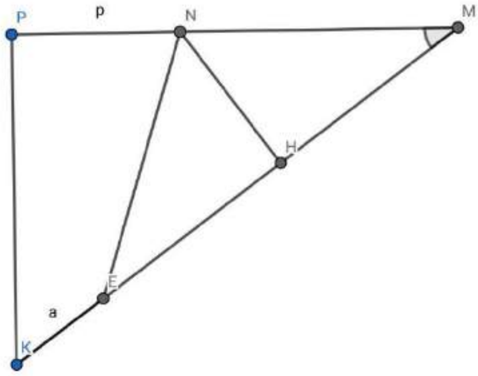
После преобразования получим f(x)=||2x-4|-4|, ОДЗ: все числа кроме -1 и 4. По графику очевидно что 3 решения возможно только при a=2 и a=4.

2+4=6.

4) В прямоугольном треугольнике МРК угол Р прямой. КР – меньший катет и КР=5. На гипотенузе МК выбрана точка Е такая, что МЕ=РМ. На катете МР выбрана точка N такая, что EN=MN=4,2. Найдите периметр четырехугольника KENP.

Ответ: 13,4.

Решение:



ME = 2•4,2• MP/MK=MP

KE+PN+NE=+KE+PN+NM=KE+ME=MK

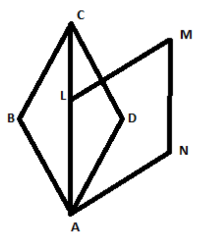
MK=8,4

5) Какое наибольшее количество 16% раствора кислоты можно получить, если имеется по 60 литров 10%, 20% и 30% растворов кислоты? При необходимости ответ округлите до десятых.

Ответ: 128,6.

Решение: Если смешать все имеющиеся растворы, то получится 180 литров 20% раствора кислоты. Чтобы получить 16% раствор, придется это количество уменьшать. При этом бесполезно уменьшать количество 10% или 20% растворов, т.к. от этого процентное содержание кислоты не уменьшится. Значит, надо уменьшить "вклад" 30% раствора. Возьмем по 60 литров первых двух растворов и x литров 3 раствора. Тогда, приравнивая объем кислоты до и после смешивания, получим: 60*0,1 + 60*0,2 + 0,3x = 0,16(60+60+x). Следовательно, x=60/7. Всего получится 128 целых и 4/7 литра.

6) Ромбы ABCD и ALMN пересекаются так, как показано на рисунке. Известно, что углы при вершине A обоих ромбов равны 60^o. Площадь пересечения ромбов равна $\sqrt{3}$, объединения - $7\sqrt{3}$. Найти площади ромбов. В ответ записать наибольшую из них. При необходимости ответ округлите до десятых.



Ответ: 10,4.

Решение: сумма площадей $8\sqrt{3}$, площадь DBHG $3\sqrt{3}$

Сумма площадей BHE и GHC равна $2\sqrt{3}$

Пусть левый ромб меньше, тогда площадь ECG >= $2\sqrt{3}$, значит GD>=3DC

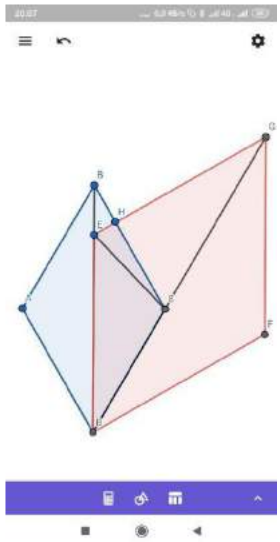
GD=DE$\sqrt{3}$

DB=DC$\sqrt{3}$

DE>=DB

Если E лежит на продолжении DB, то площадь правого ромба >$6\sqrt{3}$, площадь левого =$2\sqrt{3}$

Остаётся один вариант.



7) Два путника вышли одновременно – один из A в B, а другой из B в A. Шли они равномерно, но с разными скоростями. В момент встречи первому осталось идти ещё 16 часов, а второму – 9 часов. Через сколько часов после выхода они встретились?

Ответ: 12.

Решение: Пусть путники встретятся черех x (ч), скорость из A в B V1 (км/ч), а из B в A V2 (км/ч). Получим уравнения: V2x = V1*16 и V1x = V2*9, решив систему из которых получим: x=12 (ч).

8) В треугольнике ABC точка K принадлежит AB и AK:KB=5:3. Через вершину B проведена прямая, параллельная отрезку CK, пересекающая продолжение стороны AC в точке D. Найти BF:FC, если точка E – середина BD, а прямая AE пересекает сторону BC в точке F.

Ответ: 1,6.

Решение: Из подобия AC:AD=5:8

По теореме Менелая в треугольнике BCD

BF:FC • CA:AD • DE:EB = 1

BF:FC = 8:5.

9) Решите в целых числах уравнение $3xy + 14x + 17y + 71 = 0$. В ответе укажите сумму значений x, являющихся решениями.

Ответ: -24.

Решение:

9xy+42x+51y+213=0

(3x+17)(3y+14)=25

3x=8, -12, -16, -18, -22, -42

x=-4, -6, -14

y=-3, -13, -5