Решение типового варианта задания для 11 класса

1. Имеется 5 кусков прозрачного стекла одинаковой квадратной формы и одинакового размера. Каждое стекло своими диагоналями условно разделено на 4 одинаковые части (прямоугольные треугольники), и один из этих треугольников закрашен непрозрачной краской своего индивидуального цвета, отличного от цветов закраски других стекол. Затем все эти стекла укладываются друг на друга в стопку (с точным выравниванием границ и вершин) закрашенными частями вверх. Сколько существует различных способов укладки стекол в стопку так, чтобы вся она в итоге оказалась полностью непрозрачной в вертикальном направлении. (12 баллов)

Решение. Сначала рассмотрим некоторый один фиксированный вертикальный порядок укладки стекол (снизу вверх). Ясно, что, повернув всю укладку целиком на какой-то угол, мы укладку не изменим (не получим новой укладки). Поэтому можно считать, что нижнее стекло укладки всегда зафиксировано (не поворачивается). Тогда укладки (с фиксированным вертикальным порядком стекол) будут отличаться друг от друга поворотом на $0°$, $90°$, $180°$, и $270°$ каждого из последующих 4-х верхних стекол по отношению к фиксированному нижнему стеклу. Поэтому получим всего $4^4 = 256$ вариантов укладки с фиксированным вертикальным порядком стекол. Добавив теперь всевозможные вертикальные перестановки пяти стекол (5! = 120 вариантов), получим общее количество возможных укладок стекол в стопку: $5!\cdot 4^4 = 120\cdot 256 = 30720$ штук. Но не все эти укладки удовлетворяют условию задачи. Условию задачи удовлетворяют только те укладки, при которых вся стопка оказывается вертикально непрозрачной. Рассмотрим столбики из треугольников, находящихся над каждым из четырех фиксированных треугольников нижнего стекла. Условие задачи будет выполнено тогда, когда каждый из этих четырех столбиков является непрозрачным. При этом один из этих столбиков уже заведомо не прозрачен (тот, что стоит на нижнем закрашенном треугольнике). Рассмотрим упорядоченный набор (вектор) из возможных углов поворота (для определенности, по часовой стрелке) закрашенных треугольников на каждом из 4 верхних стекол по отношению к нижнему закрашенному треугольнику: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, где $\alpha_k \in \{0°, 90°, 180°, 270°\}, k = 1, 2, 3, 4.$

Все «столбики» из стеклянных треугольников окажутся непрозрачными, если в этом наборе углов поворота обязательно встретится хотя бы один раз угол $90°$, обязательно встретится хотя бы один раз угол $180°$ и обязательно встретится хотя бы один раз угол $270°$ (а вот угол $0°$ не обязан встречаться, хотя и не помешает, если встретится). Чтобы посчитать общее количество таких наборов (а значит, и количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол), разобьем их на четыре группы:

— наборы, в которых все углы поворота различны, т.е. все α_k попарно различны, таких наборов (за счет перестановок) всего 4! = 24 штуки;

— наборы, в которых углы поворота $180°$ и $270°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $90°$ встречается два раза, таких наборов (за счет перестановок) всего 6·2 = 12 штук (здесь 6 — это количество мест в векторе для двух углов по $90°$, а 2 — это две перестановки углов $180°$ и $270°$ на оставшихся двух местах);

— наборы, в которых углы поворота $90°$ и $270°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $180°$ встречается два раза; аналогично, таких наборов (за счет перестановок) также всего 6·2 = 12 штук;

— наборы, в которых углы поворота $90°$ и $180°$ встречаются по одному разу, а угол поворота $270°$ встречается два раза; аналогично, таких наборов (за счет перестановок) всего 6·2 = 12 штук.

В итоге, получаем всего 24 + 12 + 12 + 12 = 60 упорядоченных наборов углов поворота, удовлетворяющих нужному условию. Это и есть общее количество укладок с фиксированным вертикальным порядком стекол, при которых итоговая стопка оказывается непрозрачной. Наконец, переставив стекла 5! = 120 способами, получим общее количество 120·60 =7200 укладок, при котором итоговая стопка оказывается непрозрачной.

Ответ: 7200 способов.

2. Решите уравнение $\sin^4(2025x)+\cos^{2019}(2016x)\cdot\cos^{2018}(2025x)=1$. (12 баллов)

Решение:

$$\sin^4 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=1 \Leftrightarrow (1-\cos^2 2025x)^2+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=1$$
$$\Leftrightarrow \cos^4 2025x-2\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2018}2025x=0 \Leftrightarrow$$
$$\cos^2 2025x(\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x-2)=0 \Leftrightarrow$$

1) $\cos 2025x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4050}+\dfrac{\pi n}{2025}$, $n\in Z$ или 2) $\cos^2 2025x+\cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x=2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\cos^2 2025x=1,\\ \cos^{2019}2016x\cdot\cos^{2016}2025x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2025x=0,\\ \cos 2016x=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi n}{2025}, n\in Z,\\ x=\dfrac{2\pi m}{2016}, m\in Z,\end{cases}$$

$$\frac{n}{2025}=\frac{m}{1008},\ n=\frac{2025m}{1008}=\frac{225m}{112},\ n\in Z,\ m\in Z \Rightarrow m=112k,\quad x=\frac{\pi k}{9},\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4050}+\dfrac{\pi n}{2025}$, $n\in Z$, $x=\dfrac{\pi k}{9}$, $k\in Z$.

3. Все члены бесконечной геометрической прогрессии являются натуральными числами. Сумма третьего, пятого и седьмого членов этой прогрессии равна $819\cdot 6^{2016}$. Найдите знаменатель прогрессии. (16 баллов)

Решение: Имеем геометрическую прогрессию $b_1, b_1q, b_1q^2, \cdots, b_1q^{n-1}, \cdots,$ причем $b_1q^{n-1} \in N$ для любого номера $n \in N$. Таким образом, b_1 и q являются натуральными числами. По условию $b_3 + b_5 + b_7 = 819 \cdot 6^{2016}$, или $b_1q^2 + b_1q^4 + b_1q^6 = 2^{2016} \cdot 3^{2018} \cdot 7 \cdot 13$, $b_1q^2(1+q^2+q^4) = 2^{2016} \cdot 3^{2018} \cdot 7 \cdot 13$. Натуральное число $1+q^2+q^4$ при любом $q \in N$ есть нечетное число, следовательно, $1+q^2+q^4 = 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m$, где $k \in \{0, 1, \ldots, 2018\}$, $l, m \in \{0, 1\}$.

1) Если $k = 0$, то $1+q^2+q^4 = 7^l \cdot 13^m$, $l \in \{0, 1\}$.
   a) При $l = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 = 13^m$, которое не имеет натуральных решений (дискриминант $D = 1 + 4 \cdot 13^m$ равен 5 при $m = 0$, и равен 53 при $m = 1$.
   b) При $l = 1$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 7 = 0$, которое не имеет натуральных решений ($D = 29$).
   c) При $l = 1$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 90 = 0$, $q^2 = 9$, $q = 3$.
   При этом $b_1 = 6^{2016}$.
2) Если $k = 1$, то $1+q^2+q^4 = 3 \cdot 7^l \cdot 13^m$, $l, m \in \{0, 1\}$.
   a) При $l = 0$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 2 = 0$, $q^2 = 1$, $q = 1$.
   При этом $b_1 = 6^{2016} \cdot 3 \cdot 91$.
   b) При $l = 0$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 38 = 0$, которое не имеет натуральных решений ($D = 153$).
   c) При $l = 1$, $m = 0$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 20 = 0$, $q^2 = 4$, $q = 2$.
   При этом $b_1 = 2^{2014} \cdot 3^{2017} \cdot 13$.
   d) При $l = 1$, $m = 1$ получаем уравнение $q^2 + q^4 - 272 = 0$, $q^2 = 16$, $q = 4$.
   При этом $b_1 = 2^{2012} \cdot 3^{2017}$.
3) Если $k \in \{2, \ldots, 2018\}$, $l, m \in \{0, 1\}$, то $1+q^2+q^4 = 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m$. Для полученного биквадратного уравнения $q^2 + q^4 + 1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m = 0$ вычислим дискриминант $D = 1 - 4(1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m) = 3(4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1)$. Поскольку при $k \in \{2, \ldots, 2018\}$, $l, m \in \{0, 1\}$, число $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m$ делится на 3, то $4 \cdot 3^{k-1} \cdot 7^l \cdot 13^m - 1$ не делится на 3, и $\sqrt{D}$ является иррациональным числом. Следовательно, уравнение $q^2 + q^4 + 1 - 3^k \cdot 7^l \cdot 13^m = 0$ натуральных корней не имеет.

Ответ: задача имеет четыре решения: 1) $q = 1$; 2) $q = 2$; 3) $q = 3$; 4) $q = 4$.

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что площадь треугольника ADE равна $0{,}5$. Вписанная в четырехугольник $BDEC$ окружность касается стороны AB в точке K, причем $AK = 3$. Найдите тангенс угла BAC, если около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, и $BC = 15$. (20 баллов)

Решение: Пусть O_1 - центр вписанной в треугольник ABC окружности, R - ее радиус, O_2 - центр вписанной в треугольник ADE окружности, r - ее радиус. Обозначим p_1 полупериметр треугольника ABC, p_2 полупериметр треугольника ADE. Тогда $AK = p_2$, $AK = p_1 - BC$. Действительно, по свойствам касательных к окружности имеем (см. рис.)

$$2AK = AK + AH = AD + DK + EH + AE = AD + (DM + ME) + AE = 2p_2,$$

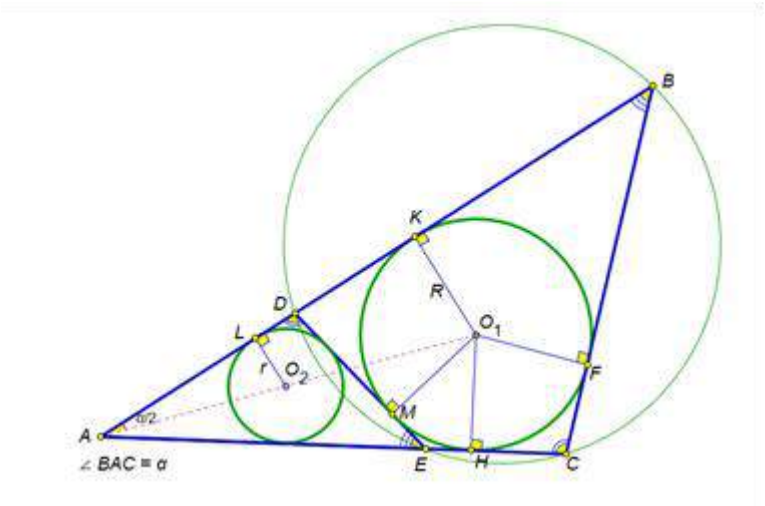
$$2AK = (AB - BK) + (AC - CH) = AB + AC + (BF + CF) - 2(BF + CF) = 2(p_1 - BC).$$

Тогда $r = S_{ADE}/p_2 = S_{ADE}/AK = 1/6.$

Поскольку около четырехугольника $BDEC$ можно описать окружность, то $\angle ABC + \angle DEC = 180°$, и $\angle AED = \angle ABC.$ Следовательно, треугольники ADE и ACB подобны, и $\dfrac{r}{R} = \dfrac{p_2}{p_1}$, $R = \dfrac{r(AK + BC)}{AK} = \dfrac{3+15}{6\cdot 3} = 1.$

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}(\alpha/2) = R/AK = 1/3$, и $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}(\alpha/2)/(1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)) = 3/4$.

Ответ: $3/4$.



5. Укажите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{|x+3|}(ax+4a) = 2\log_{|x+3|}(x+y), \\ x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4} = 0 \end{cases}$$ имеет два различных решения, и найдите эти решения при каждом a. (20 баллов)

Решение: Рассмотрим второе уравнение системы $x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ y = 5. \end{cases}$

Следовательно, $\begin{cases} \log_{|x+3|}(ax+4a) = 2\log_{|x+3|}(x+y), \\ x+1+\sqrt{x^2+2x+y-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(a-10)x+25-4a = 0, \\ y = 5, \\ -5 < x \le -1,\ x \ne -4,\ x \ne -3,\ x \ne -2. \end{cases}$

Выясним, при каких значениях параметра a уравнение $x^2-(a-10)x+25-4a=0$ (*) имеет два различных решения, если $-5<x\le -1,\ x\ne -4,\ x\ne -3,\ x\ne -2.$

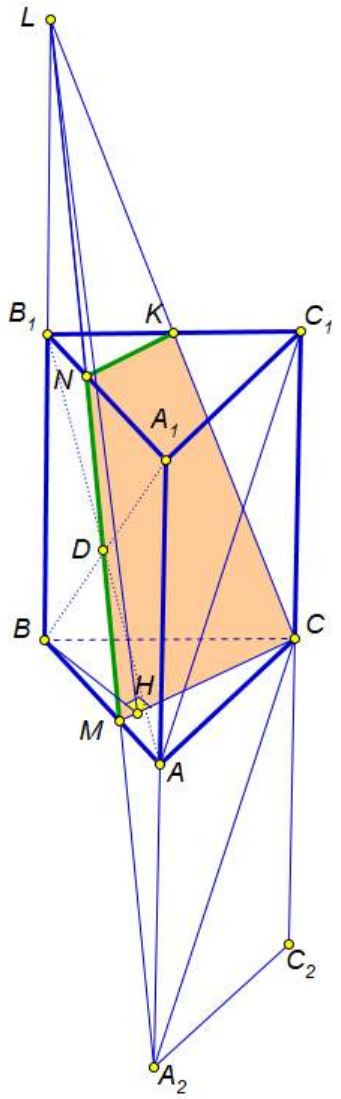
1) Выясним, при каких a точки $x=-4$, $x=-3$, $x=-2$ являются решениями уравнения (*).

$x=-4$ не является решением ни при каком a;

$x=-3$ является единственным решением уравнения (*) при $a=4$, поскольку

$$D=a(a-4)=0;$$

$x=-2$ является решением (*) при $a=4{,}5$, поскольку при подстановке $x=-2$ в уравнение (*) имеем $2^2+2a-20+25-4a=0,\ 2a=9.$ При $a=4{,}5$ уравнение (*) имеет второе решение $x=-3{,}5$, удовлетворяющее поставленным условиям. Следовательно, при $a=4{,}5$ система имеет единственное решение.



2) Пусть $a\ne 4{,}5$ и $D=a(a-4)>0$. При этом уравнение (*) будет иметь два различных решения, удовлетворяющих условию $-5<x\le -1$, если $-5<\dfrac{a-10}{2}<-1,\ f(-5)>0,\ f(-1)\ge 0,$ где $f(x)=x^2-(a-10)x+25-4a$. Имеем $f(-5)=a$, $f(-1)=16-3a$, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a(a-4)>0, \quad a\ne 4{,}5, \\ 0<a<8, \\ a>0, \\ 16-3a\ge 0, \end{cases}$$, и $a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3].$

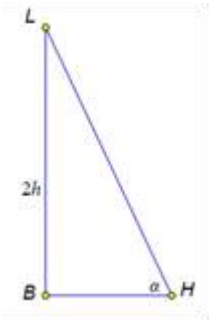
Ответ: при $a\in(4;\,4{,}5)\cup(4{,}5;\,16/3]$ два решения $x_{1/2}=\dfrac{a-10\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$, $y_{1/2}=5.$

6. Найдите объемы частей, на которые делит правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ плоскость, параллельная диагонали AC_1 боковой грани AA_1C_1C, проходящая через вершину C и центр симметрии боковой грани AA_1B_1B, если площадь сечения призмы этой плоскостью равна 21, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$. (20 баллов)

Решение:

1) Построение сечения.

В плоскости боковой грани AA_1C_1C через точку C проведем прямую A_2C, параллельную AC_1, точка A_2 - точка пересечения AA_1 и A_2C, $AA_1 = AA_2$.



Пусть D – центр симметрии боковой грани AA_1B_1B. Через точку D проводим прямую A_2D, принадлежащую плоскости сечения. Точка M - точка пересечения AB и A_2D, точка N - точка пересечения A_1B_1 и A_2D, точка L - точка пересечения прямой BB_1 и A_2D, $AM = NB_1$, $BM = NA_1 = 2AM$, $AA_2 = BB_1 = B_1L$. Если обозначить сторону основания призмы через *a*, высоту призмы через *h*, то $AM = B_1N = a/3$, $BM = NA_1 = 2a/3$, $BB_1 = B_1L = h$.

В плоскости основания $A_1B_1C_1$ через точку N проведем прямую NK, параллельную MC, точка K - точка пересечения NK и B_1C_1.

Трапеция $MNKC$ - искомое сечение.

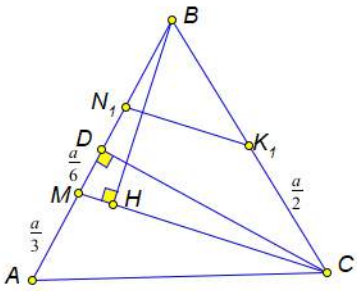
2) Спроецируем сечение на плоскость основания ABC призмы. Пусть N_1 и K_1 - проекции точек N и K на плоскость ABC. Тогда $N_1K_1 \parallel MC$, $BK_1 = K_1C$. Проекцией сечения на плоскость основания ABC является трапеция CMN_1K_1, ее площадь $S_{пр} = S_{BMC} - S_{BN_1K_1} = S_{ABC}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = 7\sqrt{3}.$

3) Найдем косинус угла α наклона плоскости сечения к плоскости основания призмы. $S_{сеч} = S_{пр}/\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = S_{пр}/S_{сеч} = 1/\sqrt{3}$.

4) Найдем высоту призмы *h*. Построим плоскость BHL, проходящую через точку B и перпендикулярную MC линии пересечения основания и плоскости сечения ($BH \perp MC, LH \perp MC$).Угол α наклона плоскости сечения к плоскости основания равен углу BHL, $BL = 2h$.

5) $BH \cdot CM = BM \cdot CD,$

$$BH = \frac{BM \cdot CD}{CM} = \frac{\frac{2a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{6},$$



$\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{6}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$,

$2h = BL = BH \operatorname{tg}\alpha = 4\sqrt{3}$, $h = 2\sqrt{3}$.

6) $V_{LBMC} = \frac{1}{3}S_{BMC}\cdot BL = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}S_{ABC}\cdot BL = \frac{a^2\sqrt{3}}{18}\cdot BL = \frac{112}{3}$.

$V_{LB_1NK} = \frac{1}{8}V_{LBMC}$, $V_{BMCB_1NK} = \frac{7}{8}V_{LBMC} = \frac{98}{3}$, $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 84$,

$V_{AMCA_1NKC_1} = 84 - \frac{98}{3} = \frac{154}{3}$.

Ответ: $\frac{112}{3}$, $\frac{154}{3}$.

Решение варианта №1 (11 класс)

1. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 1, красный – 5, оранжевый – 13, желтый – 19, зеленый – 23, голубой – 53, синий – 55, фиолетовый – 83, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n \le 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n-2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n \ge 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель?

Решение. Окончательный номер цвета пикселя равен $f^{[2019]}(5)$, где $f^{[k]}(n) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{k\ раз}(n)\ldots)$ - k-кратная композиция функции $f(n)$, равной $3n-2$ при $n \le 17$, и равной $|129-2n|$ при $n \ge 18$. Вычислим и выпишем подряд первые несколько значений $f(5)=13$, $f^{[2]}(5)=37$, $f^{[3]}(5)=55$, $f^{[4]}(5)=19$, $f^{[5]}(5)=91$, $f^{[6]}(5)=53$, $f^{[7]}(5)=23$, $f^{[8]}(5)=83$, $f^{[9]}(5)=37=f^{[2]}(5)$. Получили цикл, длиной 7 операций. Поэтому для любого натурального значения k и всякого $r=0,1,\ldots,6$, имеем $f^{[2+7k+r]}(5)=f^{[r]}(37)$. Поскольку $2019=2+288\cdot 7+1$, то $r=1$, и $f^{[2019]}(5)=f^{[1]}(37)=55$. Пиксель будет синий.

Ответ: синий.

2. Решите неравенство $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-\sqrt[4]{\sin y}-\sqrt{\dfrac{3}{\cos^2 x}+\sqrt{\sin y}-6}\ge\sqrt{3}.$

Решение:

Замена: $u=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x,\quad v=\sqrt{\sin y}.$

$$u-\sqrt{v}\ge\sqrt{u^2+v-3}+\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow$$

$$u-\sqrt{v}\ge 0,\quad u^2-2u\sqrt{v}+v\ge u^2+v-3+2\sqrt{3(u^2+v-3)}+3\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u\ge\sqrt{v}\ge 0,\\ -u\sqrt{v}\ge\sqrt{3(u^2+v-3)},\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} u\sqrt{v}=0,\ u\ge\sqrt{v}\ge 0,\\ u^2+v-3=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} u=\sqrt{3},\\ v=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathrm{tg}\,x=1,\\ \sin y=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x=\pi/4+\pi n,\ n\in Z\\ y=\pi k,\ k\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $(\pi/4+\pi n,\ \pi k),\ n,k\in Z$.

3. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

1) a^2+4a+3 делится на b;

2) $a^2+ab-6b^2-2a-16b-8=0$;

3) $a+2b+1$ делится на 4;

4) $a+6b+1$ - простое число

три истинны, а одно ложно.

Решение. Утверждения 3) и 4) оба истинными быть не могут. Если 3) истинно, то $a+6b+1=(a+2b+1)+4b$ делится на 4 и не является простым числом. Следовательно, одно из высказываний 3) или 4) является ложным.

Обратимся к утверждению 2): $a^2+a(b-2)-6b^2-16b-8=0.$ Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно a.Вычислим дискриминант $D=(b-2)^2+24b^2+64b+32=(5b+6)^2.$ Имеем $a=2b+4$ или $a=-3b-2$. Последнее равенство не имеет места, поскольку a и b – натуральные числа, $a>0, -3b-2<0.$ Утверждения 2) и 3) одновременно истинными быть не могут. Если 2) истинно, то, подставляя $a=2b+4$ в 3), получаем, что $a+2b+1=4b+5$ на 4 не делится. Следовательно, одно из высказываний 2) или 3) является ложным. Учитывая, что ложное утверждение из четырех единственно, то ложным может быть только утверждение 3).

Итак, для натуральных чисел a и b выполняются следующие условия: a^2+4a+3 делится на b; $a=2b+4$; $a+6b+1$ - простое число, т.е. $(2b+4)^2+4(2b+4)+3$ делится на b, и $8b+5$ - простое число. Имеем $(2b+4)^2+4(2b+4)+3=4b^2+24b+35$. Если это число делится на b, то b может быть равно 1, 5, 7 или 35.

1) $b=1, a=6$, $8b+5=13$ - простое число, $b=1, a=6$ - **решение задачи**.

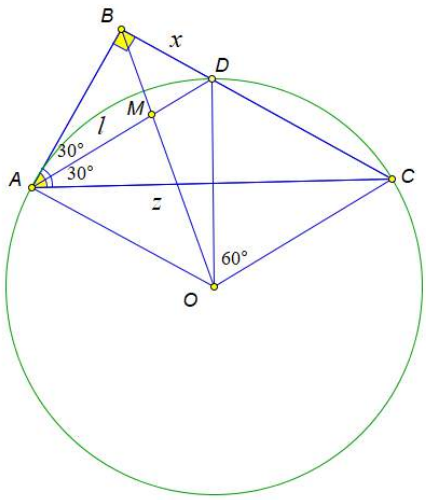
2) $b=5, a=14$, $8b+5=45$ - не является простым числом, этот случай не дает решения.

3) $b=7, a=18$, $8b+5=61$ - простое число, $b=7, a=18$ - **решение задачи**.

4) $b=35, a=74$, $8b+5=5\cdot 57$ - не является простым числом, этот случай не дает решения.

Ответ: $a=6, b=1$; $a=18, b=7$.

4. В треугольнике ABC с углом A, равным 60°, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке D равен $2\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка BM, где M - точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB=1$.



Решение: 1) $DC = 2\sqrt{3}/3$

ΔODC - равносторонний, поскольку

$2\angle DAC = \angle DOC = 60°$.

2) Обозначим $AD = l,\ BD = x,\ AC = z.$ По свойствам биссектрисы имеем $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Поскольку

$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABC},\ \dfrac{1\cdot l}{2} + \dfrac{l\cdot z}{2} = 1\cdot z\sin 60° \Rightarrow\ l = \dfrac{z\sqrt{3}}{z+1}.$

Используя утверждение для биссектрисы $l^2 = AB\cdot AC - BD\cdot DC$, получаем $l^2 = z - \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{2}{z\sqrt{3}}, \\ l = \dfrac{z\sqrt{3}}{z+1}, \\ l^2 = z - \dfrac{2\sqrt{3}x}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{z\sqrt{3}}, \\ l = \dfrac{z\sqrt{3}}{z+1}, \\ \left(\dfrac{z\sqrt{3}}{z+1}\right)^2 = z - \dfrac{4}{3z}, \end{cases} \Rightarrow\ 9z^3 = (3z^2-4)(z+1)^2,$

$3z^4 - 3z^3 - z^2 - 8z - 4 = 0,\ (z-2)(3z^3 + 3z^2 + 5z + 2) = 0,\ z = 2,$ других решений нет ($z \ge 0$).

Тогда $x = \sqrt{3}/3,\ l = 2\sqrt{3}/3.$ Треугольник AOD равносторонний, $\angle OAB = \angle ABD = 90°.$

Имеем $\dfrac{BM}{MO} = \dfrac{1}{2},\ BM = \dfrac{1}{3}BO = \dfrac{1}{3}\sqrt{1+\dfrac{4}{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{9}.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{21}}{9}$.

5. Для каждого значения параметра *a* решите уравнение

$$\log_2 \frac{3\sqrt{3} + \cos a(\sin x + 4)}{3\sin a\cos x} = |3\sin a\cos x| - |\cos a(\sin x + 4) + 3\sqrt{3}|.$$

Решение: ОДЗ: $\dfrac{3\sqrt{3} + \cos a(\sin x + 4)}{3\sin a\cos x} > 0$. На ОДЗ имеем

$\log_2 \dfrac{3\sqrt{3} + \cos a(\sin x + 4)}{3\sin a\cos x} = \log_2 |\cos a(\sin x + 4) + 3\sqrt{3}| - \log_2 |3\sin a\cos x|$. Тогда исходное уравнение на ОДЗ эквивалентно следующему

$\log_2\left|\cos a(\sin x+4)+3\sqrt{3}\right|+\left|\cos a(\sin x+4)+3\sqrt{3}\right|=\log_2\left|3\sin a\cos x\right|+\left|3\sin a\cos x\right|$.

Рассмотрим функцию $f(t)=\log_2 t+t$. Функция $f(t)$ возрастает на промежутке $(0;+\infty)$.

Пусть $u=\left|\cos a(\sin x+4)+3\sqrt{3}\right|$, $v=\left|3\sin a\cos x\right|$. Тогда имеем уравнение $f(u)=f(v)$, и в силу строгой монотонности функции f приходим к уравнению $u=v$, т.е.

$\left|\cos a(\sin x+4)+3\sqrt{3}\right|=\left|3\sin a\cos x\right|$. Последнее уравнение на ОДЗ эквивалентно следующему

$\cos a(\sin x+4)+3\sqrt{3}=3\sin a\cos x$. Имеем $\cos a\sin x-3\sin a\cos x=-3\sqrt{3}-4\cos a \quad\Leftrightarrow$

$\dfrac{\cos a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}}\sin x-\dfrac{3\sin a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}}\cos x=-\dfrac{3\sqrt{3}+4\cos a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(x-\varphi)=-\dfrac{3\sqrt{3}+4\cos a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}}$, где

$\cos\varphi=\dfrac{\cos a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}}$, $\sin\varphi=\dfrac{3\sin a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}}$ (формула вспомогательного угла). Для того чтобы уравнение имело решения необходимо выполнение условия $-1\le-\dfrac{3\sqrt{3}+4\cos a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}}\le 1$. Поскольку

$3\sqrt{3}+4\cos a\ge 3\sqrt{3}-4>0$, $-\dfrac{3\sqrt{3}+4\cos a}{\sqrt{8\sin^2 a+1}}<0\le 1$, то правое неравенство выполняется при любых значениях a. Левое неравенство эквивалентно следующему $\sqrt{8\sin^2 a+1}\ge 3\sqrt{3}+4\cos a\Leftrightarrow$

$8\sin^2 a+1\ge 27+24\sqrt{3}\cos a+16\cos^2 a\Leftrightarrow\ 24\cos^2 a+24\sqrt{3}\cos a+18\le 0\Leftrightarrow(2\cos a+\sqrt{3})^2\le 0\Leftrightarrow$

$\cos a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

1) Подставим значение $a=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ в уравнение $\cos a\sin x-3\sin a\cos x=-3\sqrt{3}-4\cos a$.

Получим $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{3}{2}\cos x=-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\Leftrightarrow\ \sin(x+\dfrac{\pi}{3})=1\Leftrightarrow\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$ Единственным условием проверки принадлежности ОДЗ является $\sin a\cos x\ne 0$, которое выполняется.

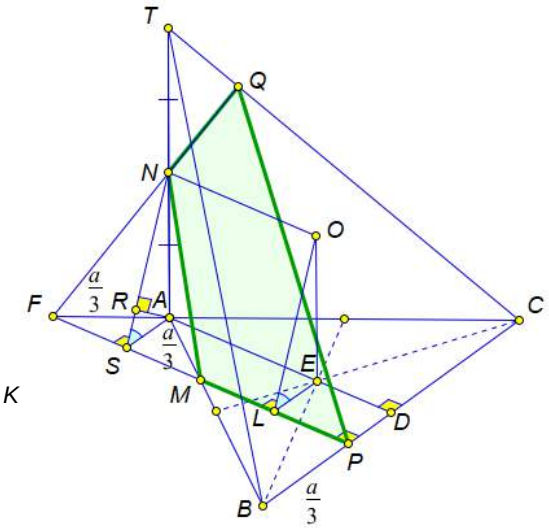
2) Подставим значение $a=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ в уравнение $\cos a\sin x-3\sin a\cos x=-3\sqrt{3}-4\cos a$.

Получим $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{3}{2}\cos x=-3\sqrt{3}+2\sqrt{3}\Leftrightarrow\ \sin(x-\dfrac{\pi}{3})=1\Leftrightarrow\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$ Единственным условием проверки принадлежности ОДЗ является $\sin a\cos x\ne 0$, которое выполняется.

Ответ: при $a=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ решения $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; при $a=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ решения $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; при $a\ne\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$, решений нет.

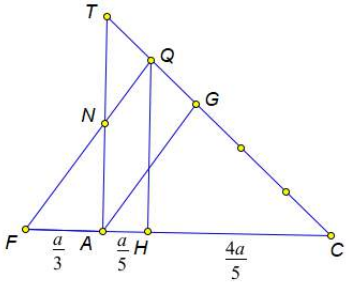
6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $\sqrt{3}$, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через центр сферы, описанной около пирамиды, образующей с плоскостью основания угол $60°$, пересекающей ребро AB в точке M, так что $MB = 2AM$, и пересекающей ребро BC. Известно, что расстояние от точки A до плоскости сечения равно 0,25.

Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания E; $OE = AT/2$. Расстояние от точки A до линии пересечения MP ($P \in BC$) секущей плоскости с плоскостью основания $AS = AR/\sin\angle ASN$, где $N \in AT$, AR - высота в треугольнике NAS, которая равна расстоянию d = 0,25 от точки A до плоскости сечения. $AS = \sqrt{3}/6 = AB/6$. Тогда в прямоугольном треугольнике ASM угол $\angle SAM = 60°$, а тогда угол $\angle SAD = 90°$, и $MP \| AD$, $PD = AB/6$.



Проведем $ON \| AD$, $N \in TA$, $TN = AN$.

Так как $ON \| MP$, ON лежит в секущей плоскости. Продолжим MP до пересечения с прямой AC в точке F, затем FN – до пересечения с ребром TC в точке Q. Четырехугольник $MNQP$ – искомое сечение. Для определения положения точки Q проведем $AG \| NQ$, $G \in$ TC; из $TN = AN$ следует $TQ = QG$. Так как $AF = AM = 1/3\,AC$, $QG = 1/3\,CG$. Следовательно, $TQ = 1/5\,TC$ и $AH = 1/5\,AC$, где H – проекция Q на плоскость основания.



Обозначим $AB = a$, $TA = h$. Из подобия $FN : FQ = AN : HQ$ получим $FN : FQ = (1/2\,h) : (4/5\,h) = 5 : 8$. Пусть $AS \perp FM$, тогда $NS \perp FM$. Из $FS = SM = 1/2\,MP$ следует $FM = 1/2\,FP$. Площадь треугольника FNM $S_{\Delta FNM}$ составляет $(5/8)\cdot(1/2) = 5/16$ площади треугольника FQP $S_{\Delta FQP}$, следовательно, площадь сечения $S_{MNQP} = 11/5\ S_{\Delta FNM}$. Так как $AS = PD = 1/6\,a$, $FM = 2\sqrt{3}\,AS = a\sqrt{3}/3$ и

$NS = \sqrt{AS^2 + AN^2} = \sqrt{(a/6)^2 + (h/2)^2} = \sqrt{a^2 + 9h^2}/6$, $S_{\Delta FNM} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+9h^2}}{6} = \dfrac{a\sqrt{a^2+9h^2}}{12\sqrt{3}}$ и

$S_{MNQP} = \dfrac{11a\sqrt{a^2+9h^2}}{60\sqrt{3}}$. Поскольку $h = \dfrac{a}{3}\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, то $\dfrac{11\sqrt{3}\,a^2}{90} = \dfrac{11\sqrt{3}}{30}$.

Можно найти площадь сечения через площадь проекции сечения на плоскость основания, используя формулу $S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}$, где φ - угол между плоскостями сечения и основания. Спроектируем сечение на основание пирамиды. Площадь проекции сечения

$$S_{MAHP} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMP} - S_{\Delta CHP} = \left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)S_{\Delta ABC} = \frac{11}{45}S_{\Delta ABC} = \frac{11\sqrt{3}\,a^2}{180},$$

$$S_{MNQP} = S_{MAHP}/\cos\angle NSA = S_{MAHP}/\cos 60^\circ = \frac{11\sqrt{3}\,a^2}{90} = \frac{11\sqrt{3}}{30}.$$

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{30}$.

6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 3, а высота пирамиды, равная $\sqrt{3}$, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол $60°$. (20 баллов)

Решение варианта №6 (11 класс)

1. Найдите натуральное число, которое имеет шесть натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 78.

Решение: Искомое натуральное число n представимо в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$, $1 < p_1 < p_2$, p_1, p_2 - простые, причем $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) = 6$ (число всех делителей равно 6). Учитывая, что каждый из натуральных сомножителей в последнем равенстве не меньше 2, имеем два возможных случая: 1) $\alpha_1+1=2, \alpha_2+1=3$, или $\alpha_1=1, \alpha_2=2$, 2) $\alpha_1+1=3, \alpha_2+1=2$, или $\alpha_1=2, \alpha_2=1$.

1) $\alpha_1=1, \alpha_2=2$, $n = p_1 \cdot p_2^2$. Поскольку сумма всех делителей равна 78, то $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2) = 78$. Поскольку p_1, p_2 - простые числа, $1 < p_1 < p_2$, то $1+p_1 > 2$, $1+p_2+p_2^2 > 7$, то ни одно разложение числа 78 на произведение двух натуральных сомножителей не подходит ($78 = 1\cdot 78, 78 = 2\cdot 39, 78 = 3\cdot 26, 78 = 6\cdot 13$ с точностью до порядка).

2) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$, $n = p_1^2 \cdot p_2$. Поскольку сумма всех делителей равна 78, то $(1+p_1+p_1^2)(1+p_2) = 78$. Поскольку $1 < p_1 < p_2$, то $1+p_2 > 3$, $1+p_1+p_1^2 > 3$, то имеем

а) $1+p_1+p_1^2 = 6, 1+p_2 = 13,$ натуральных решений нет.

б) $1+p_1+p_1^2 = 13, 1+p_2 = 6,$ или $p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ n = 3^2 \cdot 5 = 45.$

Ответ: 45.

2. Найдите все натуральные значения n, при которых $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{9} = \cos\frac{\pi}{9}$, и $\log_3^2 n + 14 < \log_3 9n^7$.

Решение: $\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + \cos\frac{2\pi n}{9} = \cos\frac{\pi}{9} \quad \Leftrightarrow$

$$2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} + 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} + \cdots + 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi n}{9} = 2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} \quad \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{3\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{5\pi}{9}-\sin\frac{3\pi}{9}+\dots+\sin\frac{\pi}{9}(1+2n)-\sin\frac{\pi}{9}(2n-1)=\sin\frac{2\pi}{9}\Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{\pi}{9}(1+2n)-\sin\frac{\pi}{9}=\sin\frac{2\pi}{9}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{9}(1+2n)=\sin\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{9}(1+2n)=2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}\Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{\pi}{9}(1+2n)=\sin\frac{4\pi}{9}\Leftrightarrow 2\sin(\frac{\pi n}{9}-\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi n}{9}+\frac{5\pi}{18})=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi n}{9}-\frac{\pi}{6}=\pi k,\ k\in Z,\quad \frac{\pi n}{9}+\frac{5\pi}{18}=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z,\Leftrightarrow 2n=3(6k+1),\ k\in Z,\quad n=2+9m,\ m\in Z.$$

Поскольку n - натуральное число, то первое соотношение не имеет место (четное число не может быть равно нечетному). Итак, $n=2+9m,\ m\in Z,\ m\ge 0.$

Решим неравенство $\log_3^2 n+14<\log_3 9n^7\Leftrightarrow\log_3^2 n-7\log_2 n+12<0,\Leftrightarrow(\log_3 n-3)(\log_3 n-4)<0,$

$\Leftrightarrow 3^3<n<3^4,\Leftrightarrow 27<2+9m<81,\ m\in Z,\ m\ge 0\Leftrightarrow 2\frac{7}{9}<m<8\frac{7}{9},\ m\in Z,\ m\ge 0\Leftrightarrow m=3,4,5,6,7,8.$

Ответ: $n=2+9m,\ \ m=3,4,5,6,7,8.$

3. Найдите множество значений функции $y=f^{[2019]}(x),$ где $f(x)=\log_{0,5}\left(\frac{\sin x}{\sin x+15}\right),$

$f^{[n]}(x)=\underbrace{f(f(f(\dots(f}_{n\ раз}(x)\dots)$ для любого натурального числа n.

Решение: Найдем сначала множество значений функции $y_1=f(x).$ Пусть $t=\sin x,\ t\in[-1;1]\ \Rightarrow\ y_1=\log_{0,5}(z),\quad z=\frac{t}{t+15}=1-\frac{15}{t+15}$ (функция $z(t)$ возрастает). При $t\in[-1;1]$ имеем $z\in\left[-\frac{1}{14};\frac{1}{16}\right]$, но по свойствам логарифмов $z>0,$ следовательно, $z\in\left(0;\frac{1}{16}\right].$

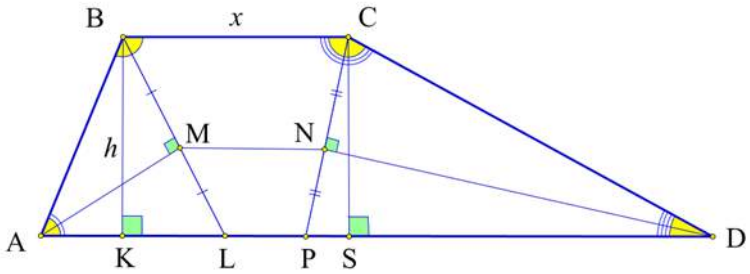
Функция $y_1=\log_{0,5}z$ убывает, и при $z\in\left(0;\frac{1}{16}\right]$ имеем $y_1\in[4;+\infty).$ Функция $y_2=f(f(x))$ будет принимать те же значения, что и функция $y_2=f(y_1),$ если $y_1\in[4;+\infty).$ Поскольку функция $t=\sin y_1$ при $y_1\in[4;+\infty)$ принимает все значения из отрезка $[-1;1],$ то повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что множеством значения функции $y_2=f(f(x))$ является промежуток $[4;+\infty).$ И так далее, следовательно, множеством значений функции $y=f^{[2019]}(x)$ является промежуток $[4;+\infty).$

Ответ: $E(y)=[4;+\infty).$

4. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 2 и 3, углы A и D острые. Биссектрисы углов A и B трапеции пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке N.

Длина отрезка MN равна 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если площадь трапеции $ABCD$ равна $26\sqrt{2}/3$.

Решение: Проведем биссектрисы углов AM и BM углов A и B соответственно. Так как $\angle A+\angle B=180°$, то треугольник ABM прямоугольный, $\angle AMB=90°$. Пусть L — точка пересечения BM с основанием AD. Тогда треугольник ABL равнобедренный, так как AM является биссектрисой и высотой, $AB=AL=2$. Пусть P — точка пересечения биссектрисы CN с основанием AD. Тогда, рассуждая аналогично, получаем, что треугольник DCP равнобедренный, $CD=DP=3$. Точка L лежит между точками A и P, поскольку в противном случае $AL+DP\le 5$, при этом $AL+DP\ge 2MN$=8 (углы A и D острые). Так как $BM=ML$, а $CN=NP$, то MN — средняя линия трапеции $BLPC$.



Средняя линия трапеции $ABCD$ равна $\frac{AL}{2}+MN+\frac{DP}{2}=\frac{13}{2}$. Пусть высота трапеции $ABCD$ равна h. По условию имеем $S_{ABCD}=\frac{13}{2}h=\frac{26}{3}\sqrt{2}$, $h=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Пусть BK и CS — высоты трапеции $ABCD$. Тогда $AK=\sqrt{4-h^2}=\frac{2}{3}$, $DS=\sqrt{9-h^2}=\frac{7}{3}$. Пусть $BC=x$, $AD=AK+x+DS=3+x$. С другой стороны, $AD=AL+2MN-x+DP=13-x$. Имеем $3+x=13-x \Rightarrow x=5$. Итак, $BC=5$, $AD=3+x=8$.

$S_{ABD}=AD\cdot h/2=16\sqrt{2}/3$, $BD^2=h^2+KD^2=(2\sqrt{129}/3)^2$, $P_{ABD}=(30+2\sqrt{129})/3$, $S_{ABD}=P_{ABD}\cdot r/2$

$r=16\sqrt{2}/(15+\sqrt{129})$.

Ответ: $16\sqrt{2}/(15+\sqrt{129})$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(2\sin x+a^2+a)^3-(\cos 2x+3a\sin x+11)^3=12-2\sin^2 x+(3a-2)\sin x-a^2-a$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

Решение: $(2\sin x+a^2+a)^3-(\cos 2x+3a\sin x+11)^3=-2\sin^2 x+(3a-2)\sin x-a^2-a+12 \Leftrightarrow$

$(2\sin x+a^2+a)^3+2\sin x+a^2+a=(\cos 2x+3a\sin x+11)^3+1-2\sin^2 x+3a\sin x+11 \Leftrightarrow$

$(2\sin x+a^2+a)^3+2\sin x+a^2+a=(\cos 2x+3a\sin x+11)^3+\cos 2x+3a\sin x+11$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+t$. Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Пусть $u=2\sin x+a^2+a,\quad v=\cos 2x+3a\sin x+11.$ Тогда имеем уравнение $f(u)=f(v),$ и в силу строгой монотонности функции f приходим к уравнению $u=v,$ т.е. $2\sin x+a^2+a=\cos 2x+3a\sin x+11.$ Последнее уравнение эквивалентно следующему $2\sin^2 x-(3a-2)\sin x+a^2+a-12=0.$ Необходимо найти все значения параметра a, при которых это уравнение имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{3\pi}{2}\right]$. Сделаем замену: $y=\sin x$.

Приходим к уравнению $2y^2-(3a-2)y+a^2+a-12=0.$ Для выполнения условия задачи нужно, чтобы один корень этого уравнения принадлежал промежутку $[-0,5;1)$, а второй, если такой имеется, не принадлежал отрезку $[-1;1]$, или это уравнение должно иметь два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$. Дискриминант уравнения $D=(3a-2)^2-8a^2-8a+96=(a-10)^2.$ Единственное решение будет при $a=10$, это решение $y=7$. В остальных случаях имеем два различных решения $y_1=a-3$ и $y_2=0,5a+2$.

1) $-0,5\le a-3<1$, $0,5a+2<-1$ или $0,5a+2>1 \Rightarrow a\in[2,5;4)$, $\sin x=a-3,\ x_1=\arcsin(a-3),$ $x_2=\pi-\arcsin(a-3).$

2) $-0,5\le 0,5a+2<1$, $a-3<-1$ или $a-3>1 \Rightarrow a\in[-5;-2)$, $\sin x=0,5a+2,\ x_1=\arcsin(0,5a+2),$ $x_2=\pi-\arcsin(0,5a+2).$

Два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$, уравнение иметь не может.

Ответ: $a\in[2,5;4)$, $x_1=\arcsin(a-3),\ x_2=\pi-\arcsin(a-3);$

$a\in[-5;-2)$, $x_1=\arcsin(0,5a+2),\ x_2=\pi-\arcsin(0,5a+2).$

6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны 3, а высота пирамиды, равная $\sqrt{3}$, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол $60°$.

Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания E; $OE=AT/2$. Расстояние от точки E до линии пересечения секущей

плоскости с плоскостью основания $EL = OE \cdot \mathrm{ctg}\angle OLE$. Во всех вариантах условия подобраны так, что $EL = AB/6$, т.е., длина EL равна расстоянию от точки E до прямой MP, а тогда линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания есть MP, причем $MP||AD$. Проведем $ON||AD$, $N \in TA$, $TN = AN$. Так как $ON||MP$, ON лежит в секущей плоскости. Продолжим MP до пересечения с прямой AC в точке F, затем FN – до пересечения с ребром TC в точке Q. Четырехугольник $MNQP$ – искомое сечение. Для определения положения точки Q проведем $AG||NQ$, $G \in TC$; из $TN = AN$ следует $TQ = QG$. Так как $AF = AM = 1/3\,AC$, $QG = 1/3\,CG$. Следовательно, $TQ = 1/5\,TC$ и $AH = 1/5\,AC$, где H – проекция Q на плоскость основания. Обозначим $AB = a$, $TA = h$. Из подобия $FN : FQ = AN : HQ$ получим $FN : FQ = (1/2\,h) : (4/5\,h) = 5:8$. Пусть $AK \perp FM$, тогда $NK \perp FM$. Из $FK = KM = 1/2\,MP$ следует $FM = 1/2\,FP$. Площадь треугольника FNM $S_{\Delta FNM}$ составляет $(5/8)\cdot(1/2) = 5/16$ площади треугольника FQP $S_{\Delta FQP}$, следовательно, площадь сечения $S_{MNQP} = 11/5\ S_{\Delta FNM}$. Так как $AK = PD = 1/6\,a$, $FM = 2\sqrt{3}\,AK = a\sqrt{3}/3$ и $NK = \sqrt{AK^2 + AN^2} = \sqrt{(a/6)^2 + (h/2)^2} = \sqrt{a^2 + 9h^2}/6$,

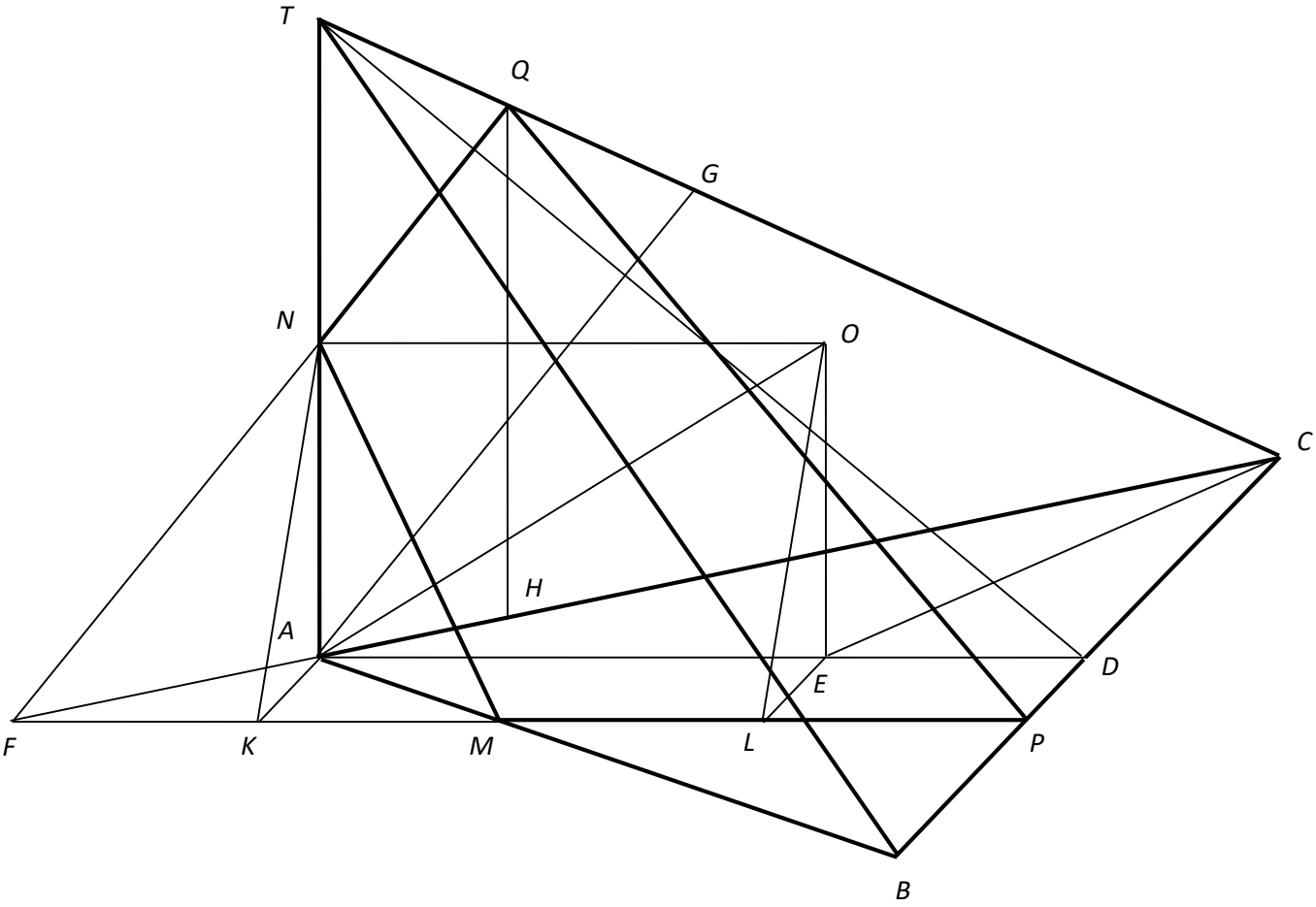
$$S_{\Delta FNM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+9h^2}}{6} = \frac{a\sqrt{a^2+9h^2}}{12\sqrt{3}} \text{ и } S_{MNQP} = \frac{11a\sqrt{a^2+9h^2}}{60\sqrt{3}}.$$

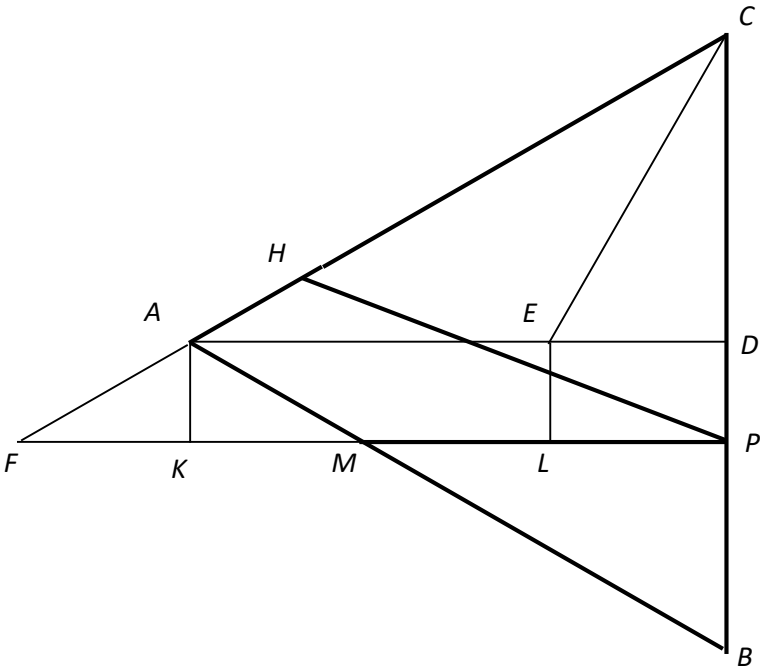
Спроектируем сечение на основание пирамиды. Площадь проекции сечения

$$S_{MAHP} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMP} - S_{\Delta CHP} = \left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)S_{\Delta ABC} = \frac{11}{45}S_{\Delta ABC} = \frac{11\sqrt{3}\,a^2}{180},$$

$$\cos\angle NKA = \frac{AK}{NK} = \frac{a}{\sqrt{a^2+9h^2}},\quad S_{MNQP} = S_{MAHP}/\cos\angle NKA = S_{MAHP}/\cos 60^\circ = \frac{11\sqrt{3}\,a^2}{90} = \frac{11\sqrt{3}}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{11\sqrt{3}}{10}$.


T
Q
G
N
O
C
H
A
D
E
F
K
M
L
P
B


C
H
A
E
D
P
F
K
M
L
B

Решение варианта №11 (11 класс)

1. В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально?

Решение: Пусть x – количество станков до модернизации, y – производительность каждого станка, т.е. количество деталей, обрабатываемых в день, z – производительность новых станков. Тогда имеем $xy = 38880 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5,\ (x+3)z = 44800 = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 7,\ \ x > 1,\ y < z,\ x,\ y,\ z \in N.$ Поскольку $y < z$, то $\dfrac{38880}{x} < \dfrac{44800}{x+3},\quad 38880(x+3) < 44800x,\ x > \dfrac{38880 \cdot 3}{5920} = \dfrac{2^5 \cdot 3^6 \cdot 5}{2^5 \cdot 5 \cdot 37} = \dfrac{3^6}{37} = 19\dfrac{26}{37},\quad x \ge 20.$

Поскольку $(x+3)z = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 7,$ то x не делится на 3, и $x = 2^\alpha \cdot 5^\beta,$ где $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},\ \beta \in \{0, 1\}.$

1) $\beta = 0,\ \ x = 2^\alpha,\ \alpha \in \{5\}.$ При $\alpha = 5$ имеем $x = 32,\ x+3 = 35,\ y = 3^5 \cdot 5 = 1215,\ z = 2^8 \cdot 5 = 1280$

2) $\beta = 1,\ \ x = 2^\alpha \cdot 5,\ \alpha \in \{2, 3, 4, 5\}.$

При $\alpha = 2$ имеем $x = 20,\ x+3 = 23,$ чего быть не может.

При $\alpha = 3$ имеем $x = 40,\ x+3 = 43,$ чего быть не может.

При $\alpha = 4$ имеем $x = 80,\ x+3 = 83,$ чего быть не может.

При $\alpha = 5$ имеем $x = 160,\ x+3 = 163,$ чего быть не может.

Ответ: 1215.

2. Решите неравенство $4\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - 16\cos^2 x + 12} \ge 2.$

Решение:

Замена: $u = 4\sin x,\quad v = \cos y.$

$$u - \sqrt{v} \ge \sqrt{u^2 + v - 4} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad u - \sqrt{v} \ge 0,\quad u^2 - 2u\sqrt{v} + v \ge u^2 + v - 4 + 4\sqrt{u^2 + v - 4} + 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u \ge \sqrt{v} \ge 0, \\ -u\sqrt{v} \ge 2\sqrt{u^2 + v - 4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\sqrt{v} = 0,\ u \ge \sqrt{v} \ge 0, \\ u^2 + v - 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, \\ v = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0,5, \\ \cos y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \pi/6 + 2\pi n,\ n \in Z \\ y = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \pi/6 + 2\pi n,\ \pi/2 + \pi k),\ \ n, k \in Z$.

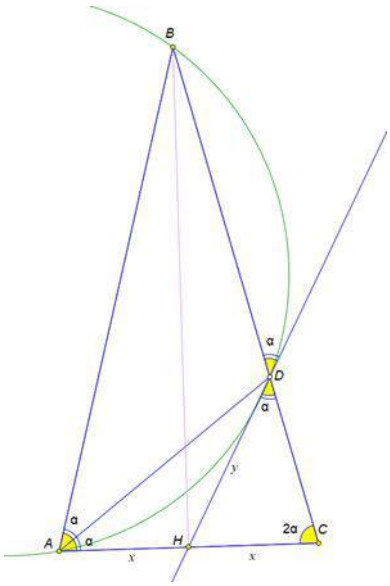
3. Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x),$ где $f(x) = \log_4 \dfrac{\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos x - 1},$

$f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n.

Решение: Найдем сначала множество значений функции $y_1 = f(x)$. Имеем $f(x) = \log_4 \frac{\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos x - 1} = \log_4 \frac{1}{1-\cos x}$. Функция $t = \cos x$ принимает значения $t \in [-1; 1]$. Рассмотрим функцию $z = \frac{1}{1-t}$, определенную на полуинтервале $[-1; 1)$. Графиком этой функции является гипербола с асимптотами $t = 1$ и $z = 0$. Функция $z = \frac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1; 1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение z равно $\frac{1}{2}$, оно достигается в точке $t = -1$, и функция $z = \frac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1; 1)$ принимает все значения из промежутка $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$. Функция $y_1 = \log_4 z$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left[\log_4 \frac{1}{2}; \infty\right) = [-0{,}5; \infty)$. Функция $y_2 = f(f(x))$ будет принимать те же значения, что и функция $y_2 = f(y_1)$, если $y_1 \in [-0,5; +\infty)$. Поскольку функция $t = \sin y_1$ при $y_1 \in [-0,5; +\infty)$ принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$, то повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что множеством значения функции $y_2 = f(f(x))$ является промежуток $[-0,5; +\infty)$. И так далее, следовательно, множеством значений функции $y = f^{[2019]}(x)$ является промежуток $[-0,5; +\infty)$. **Ответ:** $E(y) = [-0,5; +\infty)$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с снованием AC, боковая сторона AB равна 2, отрезок AD является биссектрисой. Через точку D проведена касательная DH к окружности, описанной около треугольника ADB, точка H лежит на стороне AC. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD = \sqrt{2}\,CH$.

Решение: Пусть $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, тогда по свойствам касательной $\angle CDP = \alpha$. Треугольники CDH и ACD подобны по двум углам. Имеем $\frac{CH}{CD} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $CH = \frac{CD}{\sqrt{2}}$, $AC = CD\sqrt{2}$, $CH = \frac{AC}{2}$.



Обозначим $CH = AH = x$, $DH = y$. Угол $\angle ADH = 180° - 4\alpha$. Применим теорему синусов для треугольников ADH и HCD: $\frac{x}{\sin 4\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$, $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin 2\alpha}$. Приходим к уравнению $\sin^2\alpha = \sin 2\alpha \sin 4\alpha$, $1 - \cos 2\alpha = 4\sin^2 2\alpha \cos 2\alpha$, $1 - \cos 2\alpha = 4(1 - \cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha$. Поскольку $2\alpha < 90°$, то $\cos 2\alpha \neq 1$. Имеем $4\cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha - 1 = 0$, $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Тогда получаем $AH = AB\cos 2\alpha = \sqrt{2} - 1$, $BH = \sqrt{4 - (\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$, $S_{ABC} = AH \cdot BH = \sqrt{(1+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \sqrt{4\sqrt{2} - 5}$.

Ответ: $\sqrt{4\sqrt{2} - 5}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$(\cos 2x + 14\cos x - 14a)^7 - (6a\cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a - 14)\cos x + 2\sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

Решение: $(\cos 2x + 14\cos x - 14a)^7 - (6a\cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a - 14)\cos x + 2\sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2 \Leftrightarrow$

$(\cos 2x + 14\cos x - 14a)^7 + \cos 2x + 14\cos x - 14a = (6a\cos x - 4a^2 - 1)^7 + 6a\cos x - 4a^2 - 1 \Leftrightarrow$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t$. Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Пусть $u = \cos 2x + 14\cos x - 14a$, $v = 6a\cos x - 4a^2 - 1$. Тогда имеем уравнение $f(u) = f(v)$, и в силу строгой монотонности функции f приходим к уравнению $u = v$, т.е. $\cos 2x + 14\cos x - 14a = 6a\cos x - 4a^2 - 1$. Последнее уравнение эквивалентно следующему $\cos^2 x - (3a - 7)\cos x + 2a^2 - 7a = 0$. Необходимо найти все значения параметра a, при которых это уравнение имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. Сделаем замену: $y = \cos x$. Приходим к уравнению $y^2 - (3a - 7)y + 2a^2 - 7a = 0$. Для выполнения условия задачи нужно,

чтобы один корень этого уравнения принадлежал промежутку $[-0,5;1)$, а второй, если такой имеется, не принадлежал отрезку $[-1;1]$, или это уравнение должно иметь два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$. Дискриминант уравнения $D=(3a-7)^2-8a^2+28a=(a-7)^2$. Единственное решение будет при $a=7$, это решение $y=7$. В остальных случаях имеем два различных решения $y_1=2a-7$ и $y_2=a$.

1) $-0,5\le 2a-7<1$, $a<-1$ или $a>1$ $\Rightarrow$ $a\in[3,25;4)$, $\cos x=2a-7$, $x_1=\arccos(2a-7)$, $x_2=-\arccos(2a-7)$.

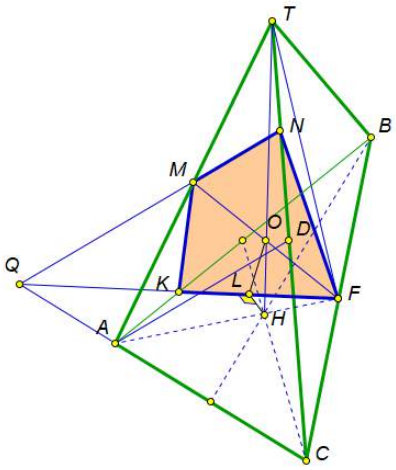
2) $-0,5\le a<1$, $2a-7<-1$ или $2a-7>1$ $\Rightarrow$ $a\in[-0,5;1)$, $\cos x=a$, $x_1=\arccos(a)$, $x_2=-\arccos(a)$.

Два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$, уравнение иметь не может.

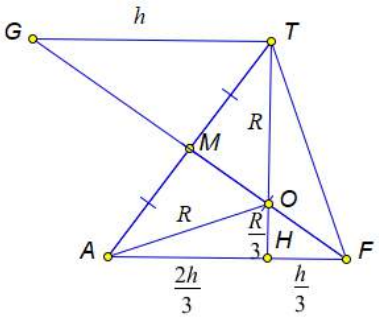
Ответ: $a\in[3,25;4)$, $x_1=\arccos(2a-7)$, $x_2=-\arccos(2a-7)$;

$a\in[-0,5;1)$, $x_1=\arccos(a)$, $x_2=-\arccos(a)$.

6 Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра TA и параллельной медиане AD боковой грани ATC, если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3:1, считая от вершины.



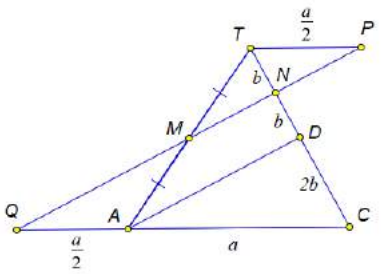
Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; M - середина TA, F - середина BC. Точки M, O, F принадлежат плоскости ATF. Докажем, что они лежат на одной прямой. Высота $AF=h$ основания ABC точкой H делится в отношении 2:1, считая от вершины A, причем $AF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.



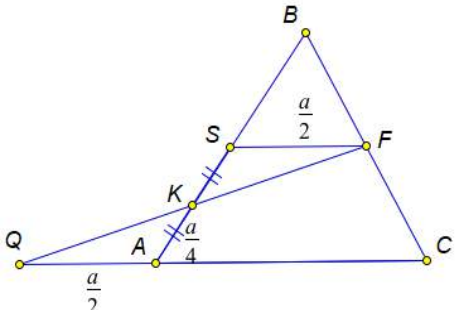
Проведем в плоскости ATF прямую $TG\|AF$, причем G принадлежит прямой MF. Треугольники GTM и FAM равны, $GT=AF=h$. Пусть точка O_1 - точка пересечения GF и TH. Треугольники GTO_1 и FHO_1 подобны, и $\dfrac{TO_1}{O_1H}=\dfrac{3}{1}$, и $O_1=O$.

Пусть R - радиус описанной около пирамиды сферы.

$\frac{TO}{OH}=\frac{3}{1}, TO=R, OH=\frac{R}{3}$. По теореме Пифагора для треугольника AOH имеем $R^2=R^2/9+a^2/3,\ a^2=8R^2/3,\ a=2, R=\sqrt{6}$.



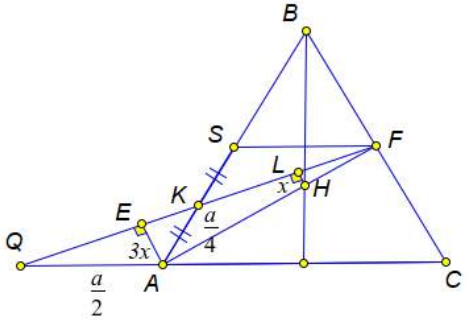
Поскольку плоскость сечения параллельна медиане AD боковой грани ATC, то через точку M проведем прямую $MN||AD$, $N \in TC,\ TN=ND=TC/4$.



Прямая MN принадлежит плоскости сечения. Точка Q - точка пересечения прямых MN и AC. В плоскости боковой грани ATC проведем прямую $TP||AC$, причем P принадлежит прямой MN. Треугольники TPN и CQN подобны, и $\frac{TP}{QC}=\frac{TN}{NC}=\frac{1}{3}$, треугольники QMA и PMT равны, $TP=QA=a/2$.

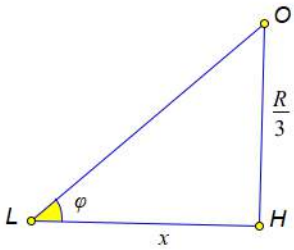
В плоскости основания ABC соединим точки Q и F, точка K - точка пересечения прямых QD и AB. В треугольнике ABC проведем среднюю линию FS. Треугольники QAK и FSK равны, $SK=KA=a/4$.

Четырехугольник $MNFK$ - искомое сечение.



Найдем угол наклона плоскости сечения к плоскости основания. Эти плоскости пересекаются по прямой QF. Из точек H и A проведем перпендикуляры HL и AE к прямой QF. $\frac{HD}{AD}=\frac{HL}{AE}=\frac{1}{3}$. Обозначим $HL=x$. Тогда $AE=3x$.

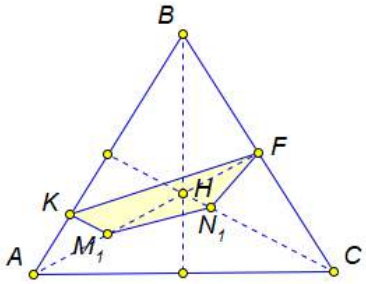
Рассмотрим треугольник QKA. Имеем $QA=a/2, AK=a/4, \angle QAK=120°$. По теореме косинусов получаем $QK^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{8}=\frac{7a^2}{16}$, $QK=\frac{a\sqrt{7}}{4}$. Вычисляя площадь треугольника QKA, имеем



$S_{QKA}=\frac{1}{2}QK\cdot 3x, S_{QKA}=\frac{1}{2}QA\cdot AK\sin 60°, QK\cdot 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}QA\cdot AK,$

$\frac{3\sqrt{7}}{4}x=\frac{a\sqrt{3}}{16},\ x=\frac{a}{4\sqrt{21}}.$

Пусть φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания. Тогда из треугольника OHL имеем



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OH}{HL} = \frac{R}{3x} = \frac{4R\sqrt{21}}{3a} = \sqrt{14},\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

$$S_{пр} = S_{ABC} - S_{KBF} - S_{AKM_1} - S_{DCN_1} - S_{AM_1N_1C} =$$

$$= S_{ABC}\left(1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}.$$

$$S_{сеч} = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi} = \frac{a^2\sqrt{3}}{24\cos\varphi} = \frac{16\sqrt{5}}{8} = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.