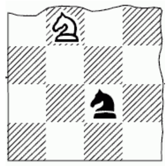
Решение типового варианта задания для 10 класса



1. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске, состоящей из 16×16 клеток двух коней – белого и черного так, чтобы они угрожали друг другу? (Конь ходит буквой «Г», т.е. он может пойти на одно из полей, ближайших к тому, на котором он стоит, но не на той же самой горизонтали, вертикали или диагонали.) (12 баллов)

Решение: Свяжем с доской $n\times n\;(n>2)$ прямоугольную систему координат. Обозначим координаты двух коней через $(x_1;\,y_1)$ и $(x_2;\,y_2)$, где $x_k,\,y_k\in\{1,2,\dots,n\},\quad k=1,2.$ Кони угрожают друг другу, если 1) $|x_1-x_2|=1,\quad |y_1-y_2|=2$ или 2) $|x_1-x_2|=2,\quad |y_1-y_2|=1$. В первом случае есть четыре такие возможности:

$$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$$
$$1\le x_1\le n-1,\ x_2=x_1+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2;$$
$$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_1\le n-2,\ y_2=y_1+2;$$
$$1\le x_2\le n-1,\ x_1=x_2+1,\quad 1\le y_2\le n-2,\ y_1=y_2+2.$$

Каждому из этих подслучаев соответствуют по $(n-1)(n-2)$ позиции. Второй случай отличается от первого поворотом на 90°. При $n=16$ имеем $8(n-1)(n-2)=8\cdot15\cdot14=1680.$

Ответ: 1680.

2. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (12 баллов)

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1=\frac{x}{8}+\frac{3-x}{4}=\frac{6-x}{8}$ и $t_2=\frac{3-x}{10}+\frac{x}{5}=\frac{3+x}{10}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x, при котором

$t_1 = t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\frac{6-x}{8} = \frac{3+x}{10} \Rightarrow x = 2,\ t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ часа. Если $x < 2$, то $t_1(x) > \frac{1}{2} > t_2(x)$, если $x > 2$, то $t_1(x) < \frac{1}{2} < t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 0,5 часа. **Ответ:** 0,5 *ч*.

3. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее ровно 70 натуральных делителей (включая единицу и само число). (16 баллов)

Решение: Пусть n – искомое натуральное число, $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ - разложение числа n на простые сомножители. Любой натуральный делитель этого числа имеет вид $d = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{l_m}$, где $l_i \in \{0, 1, \ldots, k_i\}, i = 1, \ldots, m.$ Число делителей числа n равно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1) = 70.$ Разложим число 70 на неединичные сомножители всеми возможными способами и выберем наименьшее число n. Поскольку $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7,$ то имеем пять случаев:

1) $70 = 70$, наименьшее число $n = 2^{69} > 40000$;
2) $70 = 35 \cdot 2$, наименьшее число $n = 2^{34} \cdot 3^1 > 40000$;
3) $70 = 14 \cdot 5$, наименьшее число $n = 2^{13} \cdot 3^4 > 40000$;
4) $70 = 10 \cdot 7$, наименьшее число $n = 2^9 \cdot 3^6 = 512 \cdot 81 > 40000$;
5) $70 = 7 \cdot 5 \cdot 2$, наименьшее число $n = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^1 = 25920.$

Ответ: 25920.

4. Решите неравенство $\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left(\left|x^2 - 4x + 2\right| - \left|x - 2\right|\right) \le 0.$ (20 баллов)

Решение:

ОДЗ: $2x^2 + 7x + 3 \ge 0, \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -3] \cup [-0{,}5; +\infty)$.

Исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left(\left(x^2 - 4x + 2\right)^2 - (x-2)^2\right) \le 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)\left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 3x\right) \le 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\left(3x + 4 - 2\sqrt{2x^2 + 7x + 3}\right)(x-1)(x-4)x(x-3) \le 0\,.$$

Если $x \le -3$, то $3x+4<0$, и $\left(3x+4-2\sqrt{2x^2+7x+3}\right)<0$. Таким образом, приходим к неравенству $(x-1)(x-4)x(x-3)\ge 0$, и $x \in (-\infty; -3]$.

Если $x \ge -0{,}5$, то приходим к неравенству

$\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}\right)^2(x-1)(x-4)x(x-3)\le 0$, и $x \in [0;1]\cup\{2\}\cup[3;4]$.

Окончательно имеем $x \in (-\infty; -3]\cup[0;1]\cup\{2\}\cup[3;4]$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3]\cup[0;1]\cup\{2\}\cup[3;4]$.

5. Укажите все значения a, при которых система уравнений $3(x-a)^2+y=2-a$, $y^2+\left(\frac{x-2}{|x|-2}\right)^2=1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a. (20 баллов)

Решение. Преобразуем второе уравнение: $y^2=\dfrac{x^2-4|x|+4-x^2+4x-4}{(|x|-2)^2}$; $y^2=-\dfrac{4(|x|-x)}{(|x|-2)^2}$.

При $x<0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x\ge 0$ оно равносильно системе: $x\ge 0,\ x\ne 2,\ y=0$. Подставляя $y=0$ в первое уравнение, получаем; $3(x-a)^2=2-a$, или $3x^2-6ax+3a^2+a-2=0$ (*), у которого $D/4=9a^2-9a^2-3a+6=6-3a$.

Корень $x=2$ квадратного уравнения может получиться, когда $3(2-a)^2=2-a$, т.е. если 1) $a=2$, уравнение имеет вид $(x-2)^2=0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3(2-a)=1$, т.е. $a=5/3$, тогда для x получаем уравнение $3(x-5/3)^2=2-5/3$, $x=5/3\pm 1/3$, у которого, кроме постороннего корня $x_1=2$, есть еще один корень $x_2=4/3$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(4/3;0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4=6-3a=0, \\ a>0, \quad a\ne 2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $3a^2+a-2<0$, т.е. при $-1<a<2/3$ $x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)/3$.

3. $3a^2+a-2=0$, отсюда $a=2/3$, $3x^2-4x=0$, $x_1=0$, $x_2=4/3$ удовлетворяют условиям, или $a=-1$, $3x^2+6x=0$, $x_1=0,$ $x_2=-2$ –посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)\Big/3$, если

$\begin{cases} 6-3a>0, \\ a>0, \\ 3a^2+a-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<2, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -1, \\ a\ge 2/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 2/3\le a<2$. Из этого промежутка надо убрать рассмотренную ранее точку $a=5/3$. Объединяя найденные значения a, получим ответ.

Ответ: $a\in[-1;2/3),\ x=\left(3a+\sqrt{6-3a}\right)\Big/3,\ y=0$;

$a\in[2/3;5/3)\cup(5/3;2),\ x_{1,2}=\left(3a\pm\sqrt{6-3a}\right)\Big/3,\ y=0$;

$a=5/3,\ x=4/3,\ y=0$.

6. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника ABC. Первая окружность радиуса $\frac{1}{18}$ касается сторон AB и AC в точках L и K, вторая окружность радиуса $\frac{2}{9}$ касается сторон AC и BC в точках N и M. Найдите площадь треугольника ABC, если $AL=\frac{1}{9}$, $CM=\frac{1}{6}$.
(20 баллов)

Решение: $a=\frac{1}{9},\quad b=\frac{1}{6},\quad r=\frac{1}{18},\quad R=\frac{2}{9}$

$KN=2\sqrt{rR}=\frac{2}{9},\quad AC=a+KN+b=\frac{1}{2}$

$tg\frac{A}{2}=\frac{r}{a},\quad tg\frac{C}{2}=\frac{R}{b},$

$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a^2}{a^2+r^2},\quad \cos^2\frac{C}{2}=\frac{b^2}{b^2+R^2},$

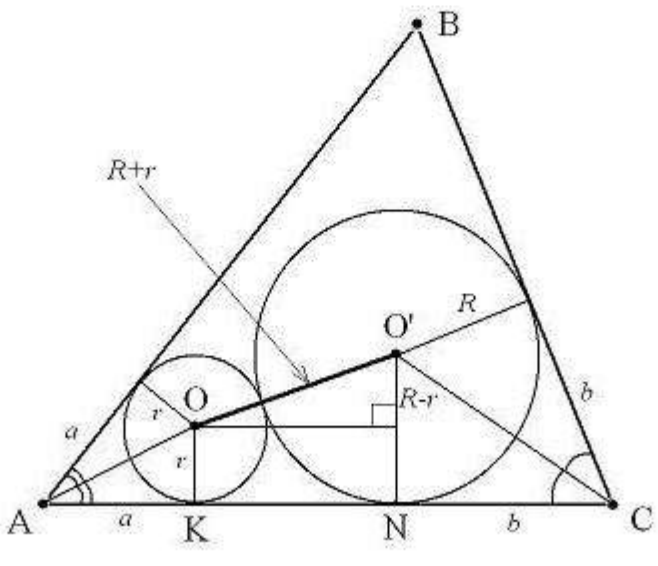


Рис. 1

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{2a^2}{a^2 + r^2} - 1 = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} = \frac{3}{5},$$

$$\cos C = 2\cos^2\frac{C}{2} - 1 = \frac{2b^2}{b^2 + R^2} - 1 = \frac{b^2 - R^2}{b^2 + R^2} = -\frac{7}{25},$$

$$\sin A = \frac{2ar}{a^2 + r^2} = \frac{4}{5}, \quad \sin C = \frac{2bR}{b^2 + R^2} = \frac{24}{25}, \quad \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{44}{125}.$$

Теорема синусов: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B}$.

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{AC^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \cdot 24 \cdot 125}{8 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 44} = \frac{3}{11}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{11}$.

Решение варианта № 10-1

1. Даны две группы числовых последовательностей, каждая из которых состоит из 15 арифметических прогрессий, содержащих по 10 членов. Первые члены прогрессий первой группы равны 1, 2, 3, …, 15, а их разности равны соответственно 2, 4, 6, …, 30. Вторая группа прогрессий имеет те же первые члены 1, 2, 3, …, 15, но разности равны соответственно 1, 3, 5, …, 29. Найдите отношение суммы всех элементов первой группы к сумме всех элементов второй группы.

(12 баллов)

Решение. Обозначим $a_1,\dots,a_{15}$ - первые члены прогрессий, $d_1,\dots,d_{15}$ - разности первой группы, $p_1,\dots,p_{15}$ - разности второй группы, тогда суммы первой группы

$S_1=\dfrac{2a_1+9d_1}{2}\cdot 10=10a_1+45d_1,\dots,S_{15}=\dfrac{2a_{15}+9d_{15}}{2}\cdot 10=10a_{15}+45d_{15}$, их общая сумма

$$S_1+\dots+S_{15}=10a_1+45d_1+\dots+10a_{15}+45d_{15}=10\cdot(a_1+\dots+a_{15})+45\cdot(d_1+\dots+d_{15})=$$
$$=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15\cdot 10+45\cdot\frac{d_1+d_{15}}{2}\cdot 15=\left(\frac{1+15}{2}\cdot 15\right)\cdot 10+45\cdot\left(\frac{2+30}{2}\right)\cdot 15=8\cdot 15\cdot 10+45\cdot 16\cdot 15$$

Аналогично считается сумма второй группы

$S_1=\dfrac{2a_1+9d_1}{2}\cdot 10=10a_1+45d_1,\dots,S_{15}=\dfrac{2a_{15}+9d_{15}}{2}\cdot 10=10a_{15}+45d_{15}$, их общая сумма

$$S_1+\dots+S_{15}=10a_1+45d_1+\dots+10a_{15}+45d_{15}=10\cdot(a_1+\dots+a_{15})+45\cdot(d_1+\dots+d_{15})=$$
$$=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15\cdot 10+45\cdot\frac{d_1+d_{15}}{2}\cdot 15=\left(\frac{1+15}{2}\cdot 15\right)\cdot 10+45\cdot\left(\frac{1+29}{2}\right)\cdot 15=8\cdot 15\cdot 10+45\cdot 15\cdot 15$$

Тогда отношение сумм $\dfrac{8\cdot 15\cdot 10+45\cdot 16\cdot 15}{8\cdot 15\cdot 10+45\cdot 15\cdot 15}=\dfrac{160}{151}$

Ответ: $\dfrac{160}{151}$.

2. Две телефонные компании договорились выпустить комплекты всевозможных трехзначных телефонных номеров так, чтобы у первой компании все номера состояли из нечетных цифр, а у второй только из четных, за исключением 0. Первая компания распродала весь первый комплект по X рублей за номер, вторая - весь свой комплект по Y рублей за номер, разность выручки первой компании и выручки второй составила 5 рублей. Укажите все возможные значения пар (X, Y), если считать, что X и Y целые числа, меньшие 250. (12 баллов)

Решение. а) Нечетных цифр 5: 1,3,5,7,9 и на каждом из 3 мест может стоять любая из них, всего комбинаций $N_{неч} = 5^3 = 125,$

б) Четные цифры 2,4,6,8, следовательно, на первом месте могут стоять 4 цифры, а дальше – любая четная из 4, всего комбинаций $N_{чет} = 4^3 = 64,$

в) Учитывая разность выручек, получаем уравнение $125X - 64Y = 5,$ Для нахождения решения воспользуемся алгоритмом Эвклида нахождения НОД. Для начала решим уравнение $125X - 64Y = 1,$ ищем НОД(125, 64):

$$125 = 1\cdot 64 + 61, \quad 64 = 1\cdot 61 + 3, \quad 61 = 20\cdot 3 + 1$$

Отсюда

$$1 = 61 - 20(64 - 1\cdot 61) = 21\cdot 61 - 20\cdot 64 = 21(125 - 1\cdot 64) - 20\cdot 64 = 21\cdot 125 - 41\cdot 64.$$

Домножаем на 5, получаем 105 и 205. В общем виде решения можно записать: $X = 105 - 64k, \ \ Y = 205 - 125k, \ \ k \in Z.$

Поскольку цена номера не может быть отрицательной и больше 250, нам подходят значения $k = 0,$ или $k = -1,$ при этом получим пары $(41; 80), \ (105; 205).$

Ответ: $(41; 80), \ (105; 205).$

3. Решите уравнение $3\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = |1 + 6x| - 4|x - 1|.$ (16 баллов)

Решение: Перепишем уравнение в виде $|3x + 3| + |x - 2| + |4x - 4| = |1 + 6x|$ заметим, что $3x + 3 - x + 2 + 4x - 4 = 1 + 6x$, поэтому решение уравнения находим из системы

$$\begin{cases} 3x + 3 \ge 0, \\ -x + 2 \ge 0, \\ 4x - 4 \ge 0, \\ 1 + 6x \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1, \\ 2 \ge x, \\ x \ge 1, \\ x \ge -1/6. \end{cases} \Rightarrow x \in [1, 2].$$

Ответ: $x \in [1, 2].$

4. Решите неравенство $4 + x^2 + 2x\sqrt{2 - x^2} < 8\sqrt{2 - x^2} + 5x.$ (20 баллов)

Решение. Перепишем в виде $4 + x^2 - 5x + 2x\sqrt{2 - x^2} - 8\sqrt{2 - x^2} < 0.$ Разложим на множители

$\begin{cases} 2-x^2 \ge 0, \\ (x-4)((x-1)+2\sqrt{2-x^2}) < 0, \end{cases}$ Т.к. подкоренное выражение неотрицательно, значит первая скобка в неравенстве отрицательна, следовательно необходимо выполнение условия $\begin{cases} 2-x^2 \ge 0, \\ (x-1)+2\sqrt{2-x^2} > 0. \end{cases}$ Решим второе неравенство системы

$$(x-1)+2\sqrt{2-x^2} > 0 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{2-x^2} > 1-x \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x < 0, \\ 2-x^2 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x \ge 0, \\ 4(2-x^2) > 1-2x+x^2, \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \ge x \ge 1, \\ 5x^2-2x-7<0, \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \ge x \ge 1, \\ \begin{cases} x \le 1, \\ -1 < x < 7/5, \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow\; x \in (-1;\sqrt{2}]$$

Ответ $(-1;\sqrt{2}]$

5. Укажите, при каких значениях параметра a уравнение $\dfrac{2-2a(x+1)}{|x|-x} = \sqrt{1-a-ax}$ имеет хотя бы одно решение. Найдите решения этого уравнения при всех найденных значениях параметра *a*. (20 баллов)

Решение. При $x \ge 0$ решений нет. Рассмотрим $x<0.$ Тогда уравнение перепишется в виде

$$\frac{1-a-ax}{-x} = \sqrt{1-a-ax} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-a-ax} = 0, \\ \dfrac{\sqrt{1-a-ax}}{-x} = 1, \end{array} \right.$$

Решаем первое уравнение $x = \dfrac{1-a}{a} < 0 \;\Rightarrow\; a \in (-\infty,\, 0) \bigcup (1,+\infty).$ Рассмотрим второе уравнение $\dfrac{\sqrt{1-a-ax}}{-x} = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{1-a-ax} = -x$, учитывая ограничения, получаем

$$1-a-ax = x^2 \;\Rightarrow\; x^2+ax+a-1=0,\; D = a^2-4a+4 = (a-2)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -a+1 < 0 \;\;\Rightarrow\; a>1, \\ x_2 = -1 < 0. \end{array} \right.$$

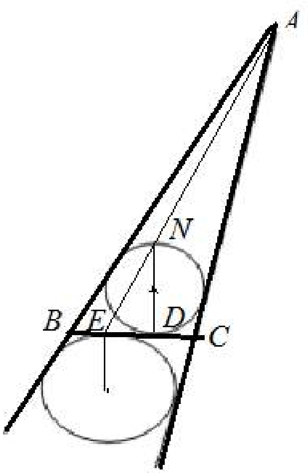
Окончательно получаем ответ:

$$\begin{array}{ll} a<0, & x=\dfrac{1-a}{a},\ x=-1, \\ 0\le a\le 1, & x=-1 \\ 1<a<2, & x=\dfrac{1-a}{a},\ x=-1,\ x=1-a, \\ a=2, & x=-1,\ x=-1/2 \\ a>2, & x=\dfrac{1-a}{a},\ x=-1,\ x=1-a. \end{array}$$

6. Окружность радиуса 2, вписанная в треугольник *ABC,* касается стороны *BC* в точке *D*. Окружность радиуса 4 касается продолжения сторон *AB* и *AC*, а также стороны *BC* в точке *E*. Найдите площадь треугольника *ABC,* если величина угла *ACB* равна $120°$. (20 баллов)

Решение. Центры окружностей лежат на биссектрисах углов. Поэтому

$$CD=r/\operatorname{tg}60^0=2/\sqrt{3},\quad CE=R/\operatorname{tg}30^0=4\sqrt{3},\ DE=4\sqrt{3}-2/\sqrt{3}=10/\sqrt{3}.$$



$\operatorname{tg}(DEN)=ND/ED=4/(10/\sqrt{3})=2\sqrt{3}/5,$ значит

$$\frac{AC}{\sin(DEN)}=\frac{EC}{\sin(60^0-DEN)}\ \Rightarrow\ AC=\frac{4\sqrt{3}\sin(DEN)}{\sqrt{3}/2\cos DEN-1/2\sin DEN}\Rightarrow$$

$$AC=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2\cdot 5/(2\sqrt{3})-1/2}=\frac{16}{\sqrt{3}}.$$ Полупериметр равен

$$p=16/\sqrt{3}+4\sqrt{3},\ \Rightarrow S=pr=32/\sqrt{3}+8\sqrt{3}=56/\sqrt{3}$$

Ответ: $56/\sqrt{3}$

Решение варианта № 10-7

1. Телефонная компания решила упорядочить процедуру выдачи телефонных номеров в новом микрорайоне следующим образом: жителям квартир с четными номерами выдавать семизначные номера, состоящие только из четных цифр, а жителям квартир с нечетными номерами – семизначные номера, состоящие только из нечетных цифр. Сколько всего существует возможностей составить семизначные номера: а) только с четными цифрами, не начинающиеся с 0, б) только с нечетными цифрами, в) каких номеров окажется больше и во сколько раз?
(12 баллов)

Решение. а) Четные цифры 0,2,4,6,8, семизначный номер не может начинаться с 0, значит, на первом месте могут стоять 4 цифры, а дальше – любая четная из 5, всего комбинаций

$N_{чет} = 4 \cdot 5^6$,

б) нечетных цифр 5: 1,3,5,7,9 и на каждом из 7 мест может стоять любая из них, всего комбинаций $N_{неч} = 5^7$,

в) нечетных больше $\dfrac{N_{неч}}{N_{чет}} = \dfrac{5^7}{4 \cdot 5^6} = \dfrac{5}{4} = 1,25.$

Ответ: а) 62500, б) 78125, в) нечетных больше в 1,25 раза.

2. Найдите все значения $n,\ n \in N,$ при которых сумма первых членов последовательности

$a_k = 3k^2 - 3k + 1,\quad k \in N,$ равна сумме первых n членов последовательности

$b_k = 2k + 89,\ \ k \in N$. (12 баллов)

Решение. Заметим, что $a_k = 3k^2 - 3k + 1 = k^3 - (k-1)^3,$ и сумма равна $S_n = n^3.$

Для второй последовательности $b_k = 2k + 89 = (k+45)^2 - (k+44)^2,$ сумма равна

$S_n = (n+45)^2 - 45^2 = n(n+90).$

Получаем уравнение $n^3 = n(n+90) \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow n = 10.$

Ответ: 10.

3. Решите уравнение

$3\sqrt{6x^2 + 13x + 5} - 6\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+5} + 2 = 0$ (16 баллов)

Решение. Заметим, что $6x^2 + 13x + 5 = (2x+1)(3x+5)$. Введем обозначения:

$$\begin{cases} m=\sqrt{2x+1}; \ \ n=\sqrt{3x+5}. \\ m\geq 0, \\ n\geq 0, \end{cases}$$

Тогда уравнение можно представить в следующем виде $3mn-6m-n+2=0.$

С учетом ОДЗ, решим это уравнение:

$$3m(n-2)-(n-2)=0 \ \Rightarrow \ (3m-1)(n-2)=0 \ \Rightarrow \ m=1/3, \ n=2.$$

Вернемся к переменной x $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+1}=1/3; \\ \sqrt{3x+5}=2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=1/9; \\ 3x+5=4; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4/9; \\ x=-1/3; \end{array}\right.$

Ответ: $-1/3; \quad -4/9;$

4. Решите неравенство

$$\frac{x(x-2)(x-3)-(x-2)^2+1}{(|x-1|-|x-2|)\sqrt{16-x^2}}\geq 0$$ (20 баллов)

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} |x-1|\neq|x-2|, \\ 16-x^2>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 3/2, \\ x\in(-4,\ 4). \end{cases}$

Преобразуем числитель

$$x(x-2)(x-3)+1-(x-2)^2=x(x-2)(x-3)+(1-x+2)(1+x-2)=$$
$$=x(x-2)(x-3)+(3-x)(x-1)=(x-3)(x^2-2x+1-x)=(x-3)(x^2-3x+1)$$

Домножим знаменатель на строго положительную сумму модулей

$$\frac{(x-3)(x^2-3x+1)}{(|x-1|-|x-2|)(|x-1|+|x-2|)\sqrt{16-x^2}}\geq 0,$$

$$\frac{(x-3)(x^2-3x+1)}{(|x-1|^2-|x-2|^2)\sqrt{16-x^2}}\geq 0, \ \ \frac{(x-3)(x^2-3\mathrm{x}+1)}{(x-1-x+2)(x-1+x-2)\sqrt{16-x^2}}\geq 0,$$

$$\frac{(x-3)(x-3/2-\sqrt{5}/2)(x-3/2+\sqrt{5}/2)}{(2x-3)\sqrt{16-x^2}}\geq 0$$

Решая методом интервалов, получим **ответ:** $x\in\left(-4;\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(\frac{3}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]\cup[3;4).$

5. Определите все значения параметра *p,* при которых система

$$\begin{cases} (x-p)^2 = 16(y-3+p), \\ y^2 + \left(\dfrac{x-3}{|x|-3}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет решения и решите ее при каждом из найденных значений *p*. (20 баллов)

Решение. ОДЗ: $|x| \neq 3.$ При $x \geq 0$ $y^2+1=1 \Rightarrow y=0.$ Если $x<0$, выражение $1-\dfrac{(x-3)^2}{(x+3)^2} = \dfrac{6x}{(x+3)^2} < 0$, чего не может быть, т.к. оно равно $y^2 \geq 0.$

Пусть $x=3.$ Тогда первое уравнение перепишется

$$(3-p)^2 = 16(p-3) \Rightarrow (3-p)(3-p+16)=0 \ \left[\begin{array}{l} p=3; \\ p=19. \end{array}\right.$$

Рассмотрим неотрицательные значения *x.*

$$(x-p)^2 = 16(p-3) \ \Rightarrow \ x = p \pm 4\sqrt{p-3}.$$

Одно неотрицательное решение уравнения может существовать в двух случаях:

1)$D=0 \ \Rightarrow \ p=3 \ \Rightarrow x=3,$ но этот случай нас не устраивает в силу ограничений на ОДЗ.

2) $\begin{cases} D=64(p-3)>0, \\ x_1x_2 = p^2-16p+48=(p-12)(p-4)<0, \end{cases} \Rightarrow x = p+4\sqrt{p-3}, \ p \in (4, 12),$

Два неотрицательных решения возможны, если выполнены условия:

$$\begin{cases} D=64(p-3)>0, \\ x_1x_2 = p^2-16p+48=(p-12)(p-4) \geq 0, \ \Rightarrow \\ x_1+x_2>0 \end{cases}$$

$x_{1,2} = p \pm 4\sqrt{p-3}, \ p \in (3;4] \cup [12;+\infty), \ \text{p} \neq 19$

Таким образом, получаем **ответ**:

$p \in (3;\,4] \cup [12;\,19) \cup (19;\infty)$, $x_{1,2} = p \pm 4\sqrt{p-3}, \quad y=0,$

$p \in (4;\,12), \ p=19,$ $x = p+4\sqrt{p-3}, \quad y=0.$

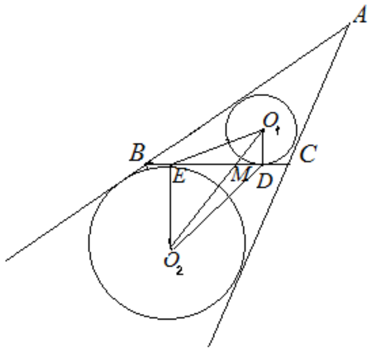
6. Окружность с центром O_1 радиуса 2, вписанная в треугольник *ABC,* касается стороны *BC* в точке *D*. Вторая окружность с центром O_2 радиуса 4 касается продолжения сторон *AB* и *AC*, а также стороны *BC* в точке *E*. Найдите площадь четырехугольника O_1DO_2E , если величина угла *ACB* равна $120°.$ (20 баллов)

Решение.

$S = S_{\triangle O_1ED} + S_{\triangle O_2ED} = 1/2 \cdot ED \cdot (O_1D + O_2E) = 3ED$

$ED = EC - DC = O_2E / tg30 - O_1D / tg60 = 4\sqrt{3} - 2/\sqrt{3} = 10/\sqrt{3}$

$S = 30/\sqrt{3}$



Ответ: $30/\sqrt{3}$.

Решение варианта №10-9

1. Найдите все целые решения системы уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^3+y^3+z^3=-10. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^3+y^3+z^3=-10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=18. \end{cases}$$

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=18 \quad \Leftrightarrow \quad ((x+y+z)^3-x^3)-(y^3+z^3)=18 \quad \Leftrightarrow$$

$$(y+z)((x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)=18 \quad \Leftrightarrow$$

$$(y+z)((x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2-y^2+yz-z^2)=18 \quad \Leftrightarrow$$

$$(y+z)((x+y)(x+y+2z)+x(x+y)+(x+y)z+(x+y)(x-y))=18 \quad \Leftrightarrow$$

$$(y+z)(x+y)(x+y+2z+x+z+x-y)=18 \quad \Leftrightarrow \quad (y+z)(x+y)(x+z)=6.$$

$y+z=2-x \;\Rightarrow\; 4-x$ может принимать значения $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

1) $2-x=1, x=1, y+z=1 \Rightarrow z=1-y \Rightarrow \; (1+y)(2-y)=6 \Rightarrow y^2-y+4=0$

Нет целых решений.

2) $2-x=-1, x=3, y+z=-1 \Rightarrow z=-1-y \Rightarrow \; (3+y)(y-2)=6 \Rightarrow y^2+y-12=0$

$y=3$ или $y=-4$, имеем два решения системы с целыми значениями

$x=3,\; y=3,\; z=-4$ и $x=3,\; y=-4,\; z=3$.

3) $2-x=2, x=0, y+z=2 \Rightarrow z=2-y \Rightarrow \; (0+y)(2-y)=3 \Rightarrow y^2-2y+3=0.$

Нет целых решений.

4) $2-x=-2, x=4, y+z=-2 \Rightarrow z=-2-y \Rightarrow \; (4+y)(2-y)=-3 \Rightarrow y^2+2y-11=0.$

Нет целых решений.

5) $2-x=3, x=-1, y+z=3 \Rightarrow z=3-y \Rightarrow \; (-1+y)(2-y)=2 \Rightarrow y^2-3y+4=0.$

Нет целых решений.

6) $2-x=-3, x=5, y+z=-3 \Rightarrow z=-3-y \Rightarrow \; (5+y)(2-y)=-2 \Rightarrow y^2+3y-12=0.$

Нет целых решений.

7) $2-x=6, x=-4, y+z=6 \Rightarrow z=6-y \Rightarrow \; (-4+y)(2-y)=1 \Rightarrow y^2-6y+9=0 \Rightarrow y=3.$

Имеем целочисленное решение $x=-4,\; y=3,\; z=3.$

8) $2-x=-6, x=8, y+z=-6 \Rightarrow z=-6-y \Rightarrow \; (8+y)(2-y)=-1 \Rightarrow y^2+6y-17=0.$

Нет целых решений.

Ответ: $(3,3,-4),\ (3,-4,3),\ (-4,3,3)$.

2. Решите неравенство $\sqrt{4-x^2}-\sqrt[4]{9-y^2}-\sqrt{\sqrt{9-y^2}-x^2}\geq 2$.

Решение:

Замена: $u=\sqrt{4-x^2},\quad v=\sqrt{9-y^2}$.

$$u-\sqrt{v}\geq\sqrt{u^2+v-4}+2\quad\Leftrightarrow\quad u-\sqrt{v}\geq 0,\quad u^2-2u\sqrt{v}+v\geq u^2+v-4+4\sqrt{u^2+v-4}+4\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u\geq\sqrt{v}\geq 0,\\ -u\sqrt{v}\geq\sqrt{u^2+v-4},\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} u\sqrt{v}=0,\ u\geq\sqrt{v}\geq 0,\\ u^2+v-4=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} u=2,\\ v=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{4-x^2}=4,\\ \sqrt{9-y^2}=0,\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x=0,\\ y=\pm 3.\end{cases}$$

Ответ: $(0,-3),\ (0,3)$

3. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет - номер 1, красный – 5, оранжевый – 13, желтый – 21, зеленый – 45, голубой – 75, синий – 87, фиолетовый – 91, черный – 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n\leq 19$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $n+4$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n\geq 20$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129-2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель?

Решение. Окончательный номер цвета пикселя равен $f^{[2019]}(5)$, где $f^{[k]}(n)=\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{k\ раз}(n)\ldots)$ - k-кратная композиция функции $f(n)$, равной $n+4$ при $n\leq 19$, и равной $|129-2n|$ при $n\geq 20$. Вычислим и выпишем подряд первые несколько значений $f(5)=9$, $f^{[2]}(5)=13$, $f^{[3]}(5)=17$, $f^{[4]}(5)=21$, $f^{[5]}(5)=87$, $f^{[6]}(5)=45$, $f^{[7]}(5)=39$, $f^{[8]}(5)=51$, $f^{[9]}(5)=27$, $f^{[10]}(5)=75$, $f^{[11]}(5)=21=f^{[4]}(5)$. Получили цикл, длиной 7 операций. Поэтому для любого натурального значения k и всякого $r=0,1,\ldots,6$, имеем $f^{[4+7k+r]}(5)=f^{[r]}(21)$. Поскольку $2019=4+287\cdot 7+6$, то $r=6$, и $f^{[2019]}(5)=f^{[6]}(21)=75$. Пиксель будет голубой. **Ответ:** голубой.

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых из четырех утверждений

5) a^2+6a+8 делится на b;

6) $a^2+ab-6b^2-15b-9=0$;

7) $a+2b+2$ делится на 4;

8) $a+6b+2$ - простое число

три истинны, а одно ложно.

Решение. Утверждения 3) и 4) оба истинными быть не могут. Если 3) истинно, то $a+6b+2=(a+2b+2)+4b$ делится на 4 и не является простым числом. Следовательно, одно из высказываний 3) или 4) является ложным.

Обратимся к утверждению 2): $a^2+ab-6b^2-15b-9=0;$ Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно a. Вычислим дискриминант $D=b^2+24b^2+60b+36=(5b+6)^2$. Имеем $a=2b+3$ или $a=-3b-3$. Последнее равенство не имеет места, поскольку a и b – натуральные числа, $a>0, -3b-3<0$. Утверждения 2) и 3) одновременно истинными быть не могут. Если 2) истинно, то, подставляя $a=2b+3$ в 3), получаем, что $a+2b+2=4b+5$ на 4 не делится. Следовательно, одно из высказываний 2) или 3) является ложным. Учитывая, что ложное утверждение из четырех единственно, то ложным может быть только утверждение 3).

Итак, для натуральных чисел a и b выполняются следующие условия: a^2+6a+8 делится на b; $a=2b+3$; $a+6b+2$ - простое число, т.е. $(2b+3)^2+6(2b+3)+8$ делится на b, и $8b+5$ - простое число. Имеем $(2b+3)^2+6(2b+3)+8=4b^2+24b+35$. Если это число делится на b, то b может быть равно 1, 5, 7 или 35.

1) $b=1, a=5$, $8b+5=13$ - простое число, $b=1, a=6$ - **решение задачи**.

2) $b=5, a=13$, $8b+5=45$ - не является простым числом, этот случай не дает решения.

3) $b=7, a=17$, $8b+5=61$ - простое число, $b=7, a=17$ - **решение задачи**.

4) $b=35, a=73$, $8b+5=5\cdot 57$ - не является простым числом, этот случай не дает решения.

Ответ: $a=5, b=1$; $a=17, b=7$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

Решение: $((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7-((3a+2)(1-x^2)+3)^7=5-2a-(3a+2)x^2-2a^2-(1-x^2)^2 \Leftrightarrow$

$((1-x^2)^2+2a^2+5a)^7+(1-x^2)^2+2a^2+5a=((3a+2)(1-x^2)+3)^7+(3a+2)(1-x^2)+3$.

Рассмотрим функцию $f(t)=t^7+t$. Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Пусть $u=(1-x^2)^2+2a^2+5a,\quad v=(3a+2)(1-x^2)+3.$ Тогда имеем уравнение $f(u)=f(v),$ и в силу строгой монотонности функции f приходим к уравнению $u=v,$ т.е. $(1-x^2)^2+2a^2+5a=(3a+2)(1-x^2)+3.$ Последнее уравнение эквивалентно следующему $(1-x^2)^2-(3a+2)(1-x^2)+2a^2+5a-3=0.$ Необходимо найти все значения параметра a, при которых это уравнение имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2};\sqrt{2}\right]$. Сделаем замену: $y=1-x^2$. Приходим к уравнению $y^2-(3a+2)y+2a^2+5a-3=0.$ Для выполнения условия задачи нужно, чтобы один корень этого уравнения принадлежал промежутку $[-0,5;1)$, а второй, если такой имеется, не принадлежал отрезку $[-1;1]$, или это уравнение должно иметь два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$. Дискриминант уравнения $D=(3a+2)^2-8a^2-20a+12=(a-4)^2.$ Единственное решение будет при $a=4$, это решение $y=7$. В остальных случаях имеем два различных решения $y_1=2a-1$ и $y_2=a+3$.

1) $-0,5\le 2a-1<1,\ a+3<-1$ или $a+3>1 \Rightarrow a\in[0,25;1)$, $1-x^2=2a-1,\ x_1=\sqrt{2-2a},$
$x_2=-\sqrt{2-2a}.$

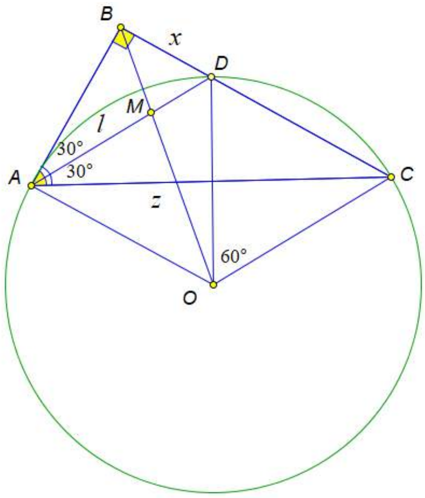
2) $-0,5\le a+3<1,\ 2a-1<-1$ или $2a-1>1 \Rightarrow a\in[-3,5;-2)$, $1-x^2=a+3,\ x_1=\sqrt{-a-2},$
$x_2=-\sqrt{-a-2}.$

Два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$, уравнение иметь не может.

Ответ: $a\in[0,25;1)$, $x_1=\sqrt{2-2a},\ x_2=-\sqrt{2-2a}.$

$a\in[-3,5;-2)$, $x_1=\sqrt{-a-2},\ x_2=-\sqrt{-a-2}.$

6. В треугольнике ABC с углом A, равным $60°$, проведена биссектриса AD. Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка OM, где M - точка пересечения отрезков AD и BO, если $AB=1,5$.



Решение: 1) $DC=\sqrt{3}$

ΔODC - равносторонний, поскольку

$2\angle DAC=\angle DOC=60^\circ$.

2) Обозначим $AD=l,\ BD=x,\ AC=z.$ По свойствам биссектрисы имеем $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}\Rightarrow\dfrac{3}{2z}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$ Поскольку $S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}=S_{\Delta ABC}$, $\dfrac{1,5\cdot l}{2}+\dfrac{l\cdot z}{2}=1,5\cdot z\sin 60^\circ\Rightarrow$

$l=\dfrac{z\cdot 3\sqrt{3}}{2z+3}$. Используя утверждение для биссектрисы $l^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$, получаем $l^2=1,5z-\sqrt{3}x.$

Имеем систему уравнений $\begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2z}, \\ l=\dfrac{z\cdot 3\sqrt{3}}{2z+3}, \\ l^2=1,5z-\sqrt{3}x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{3}}{2z}, \\ l=\dfrac{z\cdot 3\sqrt{3}}{2z+3}, \\ \left(\dfrac{z\cdot 3\sqrt{3}}{2z+3}\right)^2=1,5z-\dfrac{9}{2z}, \end{cases} \Rightarrow$

$54z^3=(3z^2-9)(2z+3)^2,\ 4z^4-6z^3-3z^2-36z-27=0,\ (z-3)(4z^3+6z^2+15z+9)=0,\ z=3,$ других решений нет ($z\ge 0$).

Тогда $x=\sqrt{3}/2,\ l=\sqrt{3}.$ Треугольник AOD равносторонний, $\angle OAB=\angle ABD=90^\circ.$

Имеем $\dfrac{BM}{MO}=\dfrac{1}{2},\ MO=\dfrac{2}{3}BO=\dfrac{2}{3}\sqrt{3+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}.$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{21}}{3}.$