

Решения заданий заключительного этапа Олимпиады «Ломоносов» по инженерным наукам 2020/2021 8-9 классы

Задача 1 (20 баллов)

Твердотельная аккумулирующая электростанция (ТАЭС) – это один из типов электростанций, которые могут использоваться для сглаживания неравномерностей в потреблении электроэнергии в течение суток. Основные ее элементы – это набор грузов и электродвигатели, которые могут работать как в режиме генератора, так и электродвигателя. Принцип работы ТАЭС довольно прост: во время пиковых нагрузок на электросеть (максимальное энергопотребление) грузы, соединенные с электродвигателями, опускаются вниз, в результате чего электродвигатели, которые в этот момент работают в режиме генератора, вырабатывают электроэнергию, которая уходит в сеть. Когда энергопотребление снижается (обычно это происходит ночью), электродвигатели поднимают грузы вверх. За счет того, что в течение суток стоимость электроэнергии меняется, строительство ТАЭС может оказаться экономически рентабельным проектом.

Оцените прибыль (доходы минус расходы, в рублях) при эксплуатации ТАЭС в течение месяца, если про нее известно следующее:

- КПД работы электродвигателя и при подъеме груза, и при работе в режиме генератора составляет 90%;
- суммарная масса грузов, которые могут опускаться и подниматься в ТАЭС, составляет 10^8 кг;
- перепад высот для поднятых и опущенных грузов составляет 100 м;
- в течение часа ТАЭС может поднять или опустить 10^7 кг грузов.

Считайте, что стоимость электроэнергии в течение суток меняется в соответствии с приведенной ниже гистограммой.

руб./КВт·ч																								
5																								
4																								
3																								
2																								
1																								
час суток	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Решение:

Определим, сколько электроэнергии можно получить от твердотельной аккумулирующей электростанции (ТАЭС) за один час, когда ее электродвигатели работают в режиме генераторов:

$$E_{\text{ген.час}} = \eta m g h = 9 \cdot 10^9 \text{ Дж},$$

где $\eta = 0,9$ – КПД электродвигателя, $m = 10^7$ кг – масса, которую в течение часа может поднять ТАЭС, $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения, $h = 100 \text{ м}$ – перепад высот для поднятых и опущенных грузов.

Если электродвигатели используются для поднятия грузов, то за один час непрерывной работы ТАЭС потребляет

$$E_{\text{электрдв.час}} = \frac{mgh}{\eta} \approx 1,1 \cdot 10^{10} \text{ Дж}$$

Предположим, что на протяжении всего промежутка времени, когда электричество стоит 2 руб./кВт·ч, ТАЭС поднимает грузы. На это потребуется

$$E_{\text{электрдв.}} = 8 \cdot E_{\text{электрдв.час}} = 8,8 \cdot 10^{10} \text{ Дж}$$

При этом будет потрачено

$$P_{\text{расход.сутки}} = 2 \frac{\text{руб.}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}} \cdot 8,8 \cdot 10^{10} \text{ Дж} \approx 2 \frac{\text{руб.}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}} \cdot 2,4 \cdot 10^4 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ руб.}$$

Отдельно отметим, что суммарной массы грузов достаточно для непрерывной работы ТАЭС в течение указанного времени.

Как видно из гистограммы, отображающей изменение стоимости электроэнергии в течение суток, на протяжении 7 часов можно опускать грузы и продавать генерируемую при этом электроэнергию по цене 5 руб./кВт·ч. Для того чтобы полностью опустить все поднятые грузы, еще один час электродвигатели должны работать в режиме генераторов, когда ТАЭС опускает грузы и продает электроэнергию по цене 4 руб./кВт·ч.

Таким образом, опустив все поднятые за ночь грузы, можно получить доход

$$P_{\text{доход.сутки}} = 5 \frac{\text{руб.}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}} \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ Дж} + 4 \frac{\text{руб.}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}} \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ Дж} \approx 8,8 \cdot 10^4 \text{ руб.} + 10^4 \text{ руб.} \\ \approx 9,8 \cdot 10^4 \text{ руб.}$$

Прибыль в течение суток можно определить как разницу между доходами и расходами:

$$P_{\text{прибыль.сутки}} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ руб.} - 4,8 \cdot 10^4 \text{ руб.} = 5 \cdot 10^4 \text{ руб.}$$

Нетрудно убедиться в том, что именно рассмотренная стратегия выбора интервалов времени, в течение которых следует опускать и поднимать грузы, дает максимальную прибыль (поскольку мы поднимаем грузы в течение всего времени, когда стоимость электроэнергии минимальна, а опускаем в течение всего времени, когда ее стоимость максимальна, плюс остается еще один час, когда стоимость максимальна в оставшемся интервале времени).

Зная прибыль в течение одних суток, можно найти прибыль в течение месяца (считаем, что в месяце 30 дней):

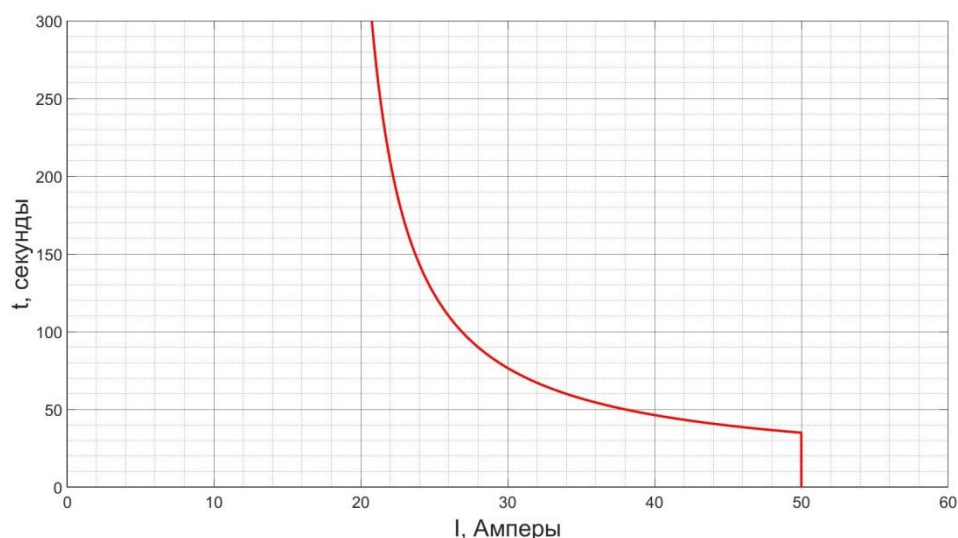
$$P_{\text{прибыль.месяц}} = 30 \cdot P_{\text{прибыль.сутки}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ руб.}$$

Ответ: максимальную прибыль за месяц можно оценить как 1,5 миллиона рублей.

Задача 2 (20 баллов)

В Васиной квартире идет ремонт, поэтому электроплиту и электрочайник с кухни пришлось перенести в комнату. Провода, идущие к комнатным розеткам, защищены от перегрузки старым автоматическим выключателем, срабатывающим, когда проходящий через него ток достигает слишком больших значений. Время t , через которое выключатель размыкает цепь, зависит от силы протекающего через него тока I так, как показано на рисунке. Напряжение в сети – 220 В. Духовка в плите потребляет 3,5 кВт, чайник – 2,4 кВт. Сколько воды Вася может вскипятить в чайнике за один раз при работающей духовке, не допуская срабатывания автоматического выключателя?

Температура заливаемой в чайник воды равна $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, удельная теплоемкость воды – $4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$. Теплопотери в чайнике пренебречь.



Решение:

Пусть $U = 220\text{ В}$ — напряжение в сети, W_1 — мощность, потребляемая духовкой электроплиты, а W_2 — мощность, потребляемая электрочайником. Поскольку духовка и чайник подключаются параллельно, при их одновременной работе протекающий через автоматический выключатель ток равен

$$I = \frac{W_1}{U} + \frac{W_2}{U} \approx 26,8\text{ А.}$$

Из приведенного графика видно, что при токе $I = 26,8\text{ А}$ выключатель разомкнет цепь через время $t \approx 100\text{ с}$. За это время в чайнике можно вскипятить (нагреть от температуры $T_1 = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$ до температуры $T_2 = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$) воду массой

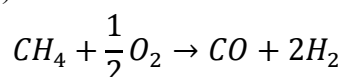
$$m = \frac{W_2 t}{c(T_2 - T_1)} \approx 635\text{ г};$$

здесь $c = 4200\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^{\circ}\text{C})$ — удельная теплоемкость воды.

Ответ: около 635 г.

Задача 3 (20 баллов)

Инженеру Алексею Петровичу дали задание рассчитать технологическую схему получения чистого водорода путем неполного окисления метана, содержащего примеси сероводорода и хлора (реакция 1):

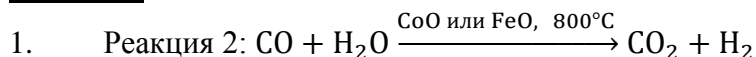


Общий объем метана с примесями – $11,2\text{ л}$ при н.у., при этом содержание метана, хлора и сероводорода равно $87, 4$ и 9 мольных процентов соответственно. Полученную газовую смесь пропускают через водяной пар при температуре $800\text{ }^{\circ}\text{C}$ над катализатором (CoO или FeO) (реакция 2), при этом один из продуктов указанной реакции совпадает с одним из продуктов реакции взаимодействия сероводорода и карбоната калия (реакция 3). Затем

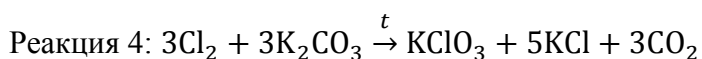
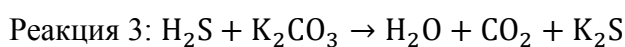
для очистки от примесей сероводорода и хлора газ, полученный в реакции 2, пропускают через горячий концентрированный раствор карбоната калия (реакция 3 и реакция 4). Последняя стадия – очистка водорода от углекислого газа (реакция 5) путем продувания продуктов последовательно проведенных реакций 2, 3 и 4 через колонку, которая представляет собой сосуд, заполненный порошком оксида кальция при температуре 500 – 800 °С. Помогите Алексею Петровичу с расчетом технологической схемы:

1. запишите уравнения реакций 2 – 5;
2. на сколько изменилась масса колонки, заполненной оксидом кальция?

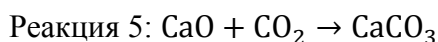
Решение:



Таким образом, после реакции 2 газовая смесь состоит из CO_2 , H_2 , H_2S и Cl_2 .



Таким образом, после реакций 3 и 4 газовая смесь состоит из CO_2 и H_2 .



Таким образом, после реакции 5 из газообразных продуктов остался только H_2 .

2. Пусть $x = \nu(\text{CH}_4)$, $y = \nu(\text{Cl}_2)$ и $z = \nu(\text{H}_2\text{S})$ — количество вещества метана, хлора и сероводорода соответственно. В реакциях 2, 3 и 4 выделяется CO_2 , который взаимодействует с CaO в реакции 5. Из реакций 1, 2, 3 и 4 следует, что количество вещества CO_2 равно $\nu(\text{CO}_2) = x + y + z = 0,5$ моль. Тогда изменение массы колонки, заполненной порошком оксида кальция, можно рассчитать как массу поглощенного CO_2 , т.е. как $\mu(\text{CO}_2) \cdot \nu(\text{CO}_2) = 22$ г, где $\mu(\text{CO}_2)$ – молярная масса CO_2 .

Ответ: масса колонки увеличилась на 22 г.

Задача 4 (20 баллов)

Биологический отсек космического корабля первоначально заполнен воздухом при давлении 1 атм. После возникновения в обшивке отсека микротрещины отсек стал ежедневно терять 0,5 кг воздуха, что привело к падению давления со скоростью 1 мм рт. ст. в час. Для выполнения запланированной программы исследований нельзя допустить падения парциального давления кислорода в отсеке более чем на 30% от его исходного уровня. Запас кислорода для биологического отсека на космическом корабле составляет 5 кг. Какова оптимальная стратегия расходования кислорода для компенсации утечки воздуха? Оцените, в течение какого времени при такой стратегии можно поддерживать минимально допустимое парциальное давление кислорода. Какое давление будет в биологическом отсеке к моменту исчерпания запаса кислорода? Температура в отсеке поддерживается постоянной.

Решение:

При постоянной температуре в каждый момент времени скорость падения парциального давления любого входящего в состав воздуха газа (в частности, кислорода) можно считать пропорциональной концентрации молекул этого газа, то есть его текущему парциальному давлению. Поэтому оптимальная стратегия поддержания парциального давления кислорода на уровне не ниже $p_{min}^k = \eta p_0^k = 106$ мм рт. ст., где $\eta = 0,7$, а $p_0^k = 0,2$ атм — начальное парциальное давление кислорода (для оценки считаем, что воздух состоит из 20 % кислорода и 80 % азота, и пренебрегаем различием масс молекул кислорода и азота), состоит в том, чтобы сначала дать давлению кислорода упасть до p_{min}^k , не компенсируя утечку кислорода, а затем малыми порциями (например, ежедневно) расходовать имеющийся запас кислорода для поддержания давления на уровне вблизи p_{min}^k .

Пусть $p_0 = 1$ атм – начальное давление воздуха, а p_1 — давление воздуха через сутки после возникновения утечки. По условию, в течение суток давление падает на 24 мм рт. ст., т.е. относительное изменение давления за сутки равно $\beta = \frac{p_0 - p_1}{p_0} = \frac{24}{760} \approx 0,0316 \ll 1$ (поскольку $p_0 = 1$ атм = 760 мм рт. ст.). Тогда $p_1 = \alpha p_0$, где $\alpha = 1 - \beta \approx 0,9684$. Так как скорость падения парциального давления кислорода пропорциональна его текущему парциальному давлению, $p_n^k = \alpha p_{n-1}^k = \alpha^n p_0^k$, где p_i^k — парциальное давление кислорода в биологическом отсеке к концу i -х суток с момента возникновения утечки. Пусть N — номер суток, в конце которых давление кислорода упадет до p_{min}^k ; тогда для нахождения N нужно решить уравнение

$$\alpha^N = \eta.$$

Точное решение этого уравнения относительно N может быть найдено с использованием логарифмической функции ($N = \log_{\alpha} \eta \approx 11,1154 \approx 11$) или подбором. Однако с очень хорошей точностью приближенный ответ можно получить с помощью следующих простых соображений. Пусть Δp_n^k — падение парциального давления кислорода за n -е сутки. Ясно, что самое грубое приближение состоит в том, чтобы считать, что на протяжении всех $1 \dots N$ суток Δp_n^k оставалось неизменным и равным своему значению сразу после появления утечки, т.е. Δp_1^k ; однако ясно также, что это приближение можно существенно улучшить, если по-прежнему считать суточное падение давления неизменным, но принять его равным не Δp_1^k , а среднему арифметическому $\frac{\Delta p_1^k + \Delta p_N^k}{2} = \frac{1+\eta}{2} \Delta p_1^k = 0,85 \Delta p_1^k$. Тогда из уравнения

$$N \frac{1+\eta}{2} \Delta p_1^k = (1 - \eta) p_0^k$$

находим $N \approx 11,1765$, т.е. опять $N \approx 11$.

В момент появления трещины суточная утечка кислорода была равна $\Delta m_0^k = c_k \Delta m = 0,1$ кг, где $c_k = 0,2$ — массовая доля кислорода в воздухе, а $\Delta m = 0,5$ кг — суточная потеря воздуха. Поэтому после падения давления кислорода до p_{min}^k в процессе поддержания его на этом уровне суточная потеря кислорода будет равна $\Delta m^k = \eta \Delta m_0^k = 0,07$ кг. Следовательно, если масса запаса кислорода равна M , то после падения давления кислорода до p_{min}^k поддерживать его на этом уровне можно будет в течение $N_1 = \frac{M}{\Delta m^k} \approx 71,43 \approx 71$ суток. Таким образом, полная продолжительность интервала времени, на котором можно обеспечить парциальное давление кислорода на уровне, не меньшем чем p_{min}^k , равна $n = N + N_1 = 82$ суткам. К концу этого периода давление азота упадет

до $p_{\text{конечное}}^a = c_a p_0 a^n \approx 44$ мм рт. ст. (здесь $c_a = 0,8$ — массовая доля азота в воздухе), а полное давление газовой атмосферы в биологическом отсеке станет равным $p_{\text{конечное}} = p_{\text{min}}^k + p_{\text{конечное}}^a \approx 150$ мм рт. ст.

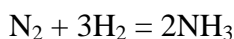
Ответ: в течение 82 суток; 150 мм рт. ст.

Задача 5 (20 баллов)

Предприятие получает аммиак взаимодействием азота и водорода с применением катализатора. После каждого прохода катализатора образовавшийся аммиак удаляют охлаждением. При каждом проходе катализатора в реакцию с водородом вступает четверть имеющегося азота. Из-за несовершенства технологического процесса при каждом удалении аммиака из зоны реакции также удаляется 1 кг азота, который не участвует в дальнейших превращениях. Сколько аммиака может получить предприятие из 100 кг азота? Водород всегда присутствует в избытке.

Решение:

Запишем уравнение реакции:



Пусть x_n кг — масса азота, оставшегося после n -ого прохода катализатора; при этом $x_0 = 100$. Тогда $x_{n+1} = 0,75x_n - 1$. Пусть $y_n = x_n + 4$, тогда $y_{n+1} = 0,75y_n$, $y_0 = 104$. Отсюда получаем, что $y_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 104$. Реакция идет, пока $y_n \geq 4$, то есть $n \leq 11$. Таким образом, проход катализатора осуществляется 12 раз, причем 11 раз удаляется 1 кг азота, после 12-ого прохода — остаток $0,75x_{11} = 0,75 \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{11} \cdot 104 - 4\right) \approx 0,3$ кг. Таким образом, не прореагируют с водородом 11,3 кг азота, а прореагируют 88,7 кг или $\frac{88,7 \text{ кг}}{28 \text{ кг/кмоль}} = 3,17$ кмоль азота. Получаем $3,17 \text{ кмоль} \cdot 2 = 6,34 \text{ кмоль}$ аммиака, то есть $6,34 \text{ кмоль} \cdot 17 \text{ кг/кмоль} = 107,7 \text{ кг}$ аммиака.

Ответ: 107,7 кг.