

**Решения заданий отборочного этапа
Олимпиады «Ломоносов» по инженерным наукам 2020/2021
10-11 классы**

Задача 1 (20 баллов).

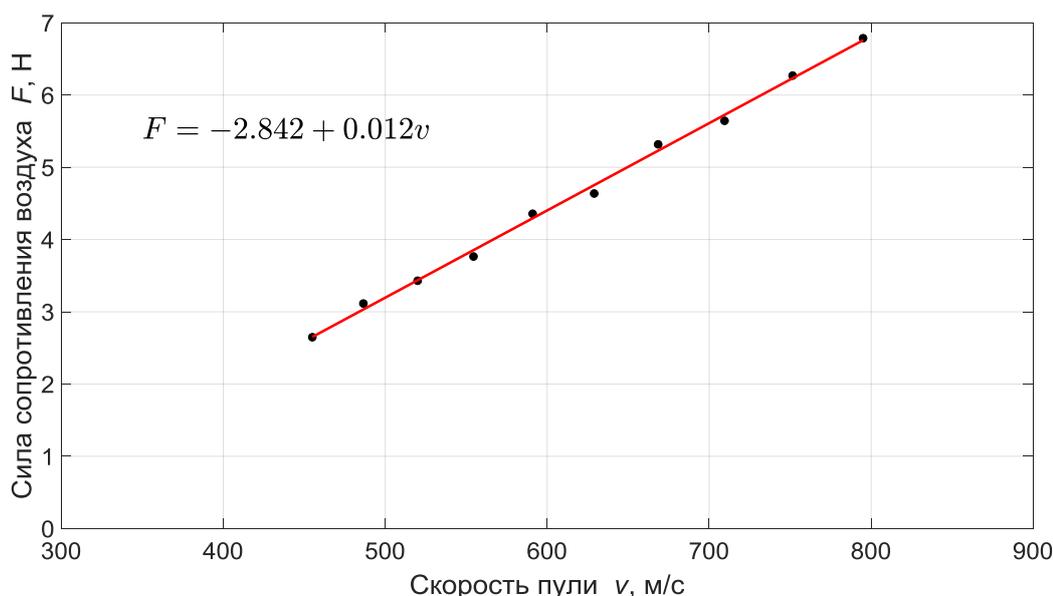
Баллистические характеристики различных боеприпасов приводятся в специальных таблицах, которые содержат, в частности, экспериментальные данные о зависимости скорости пули от пройденного ею с момента выхода из ствола пути. Для одного из распространенных патронов с пулей массой 9,7 г результаты соответствующих измерений приведены ниже:

Пройденный путь, м	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
Скорость пули, м/с	817	773	730	689	648	610	572	537	503	470	440

Какой формулой можно приближено описать зависимость силы сопротивления воздуха, действующей на пулю, от ее скорости в приведенном интервале скоростей?

Решение:

Пусть i – номер столбца приведенной в условии задачи таблицы ($1 \leq i \leq 11$). Обозначим стоящие в i -ом столбце значения пройденного пути и скорости s_i и u_i соответственно. Тогда, воспользовавшись теоремой об изменении кинетической энергии, на i -ом участке траектории пули длиной $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$ (здесь $1 \leq i \leq 10$) силу сопротивления воздуха можно оценить как $F_i = \frac{E_i - E_{i+1}}{\Delta s_i}$, где $E_i = \frac{mu_i^2}{2}$ – кинетическая энергия пули в начале i -го участка, $E_{i+1} = \frac{mu_{i+1}^2}{2}$ – кинетическая энергия пули в конце i -го участка (или, что то же самое, в начале $(i + 1)$ -го участка), $m = 9,7$ г – данная в условиях задачи масса пули. Полученная таким образом величина F_i может рассматриваться как приближенное значение для силы сопротивления воздуха при скорости пули v_i , равной среднему арифметическому ее скоростей в начале и конце i -го участка траектории, т.е. $v_i = \frac{u_i + u_{i+1}}{2}$. Нанеся на график точки с координатами (v_i, F_i) , получим приведенную ниже картинку, из которой видно, что найденные точки довольно хорошо ложатся на прямую линию, т.е. зависимость силы сопротивления F от скорости v может быть приближенно описана выражением $F = F_0 + kv$.



Проведя разумным образом прямую так, чтобы по возможности уменьшить среднее отклонение точек (v_i, F_i) от нее, можно найти F_0 и k . Например, для прямой, проведенной так, как показано на рисунке, $F_0 = -2,842$ Н, $k = 0,012$ Н·с/м.

Ответ: $F \approx F_0 + kv$, где $F_0 = -2,842$ Н, $k = 0,012$ Н·с/м.

Задача 2 (20 баллов).

Электрическая схема состоит из трех абсолютно одинаковых резисторов, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда с шириной 2 см и высотой 1 см и сделанных из одного и того же вещества. Резисторы соединены так, как показано на рисунке 1. Из-за частичного повреждения защитной оболочки, предохраняющей резисторы от воздействия внешней агрессивной среды, на резисторах № 1 и № 3 начинается химическая реакция, в результате которой вещество становится диэлектриком и перестает пропускать электрический ток.

Для резистора № 1 химическая реакция начинается с грани параллелепипеда, отмеченной на рисунке 2 красным цветом. Непрореагировавшая область представляет собой прямоугольный параллелепипед, у которого длина и высота остаются постоянными, а ширина с течением времени уменьшается со скоростью 0,1 мм/ч.

Для резистора № 3 химическая реакция начинается с грани параллелепипеда, отмеченной на рисунке 3 красным цветом. Непрореагировавшая область представляет собой прямоугольный параллелепипед, у которого длина и ширина остаются постоянными, а высота с течением времени уменьшается со скоростью 0,1 мм/ч.

Оцените, через какое время после повреждения защитной оболочки сопротивление электрической схемы увеличится в 3 раза.

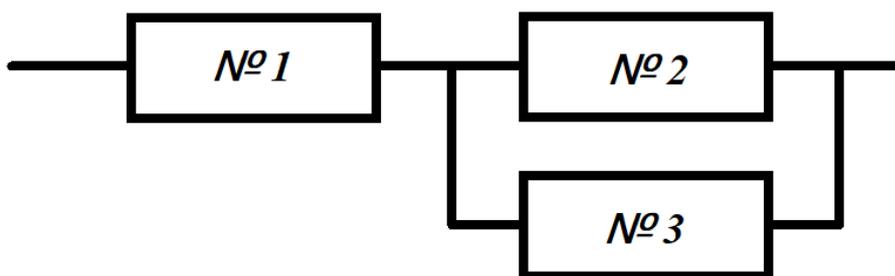


Рисунок 1

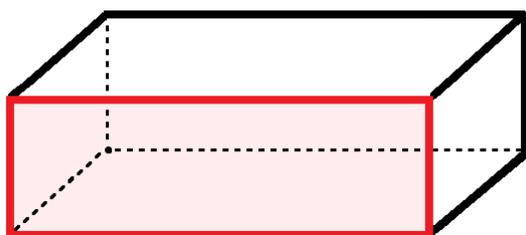


Рисунок 2

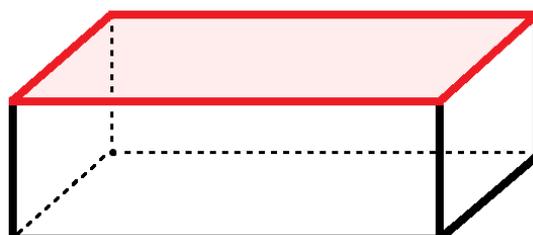


Рисунок 3

Решение:

Сопротивление каждого из резисторов определяется соотношением $R = \frac{\rho l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление материала, l – длина проводника, S – площадь сечения проводника.

Сопротивление всего участка цепи определяется соотношением $R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$, где R_1 – сопротивление резистора №1, R_2 – сопротивление резистора №2, R_3 – сопротивление резистора №3.

Зависимость площади поперечного сечения резистора №1 от времени t определяется соотношением $S_1 = a(2a - vt)$, где $a = 1$ см, $v = 0,1$ мм/ч.

Зависимость площади поперечного сечения резистора №3 от времени t определяется соотношением $S_3 = 2a(a - vt)$.

С учетом указанных выше соотношений сопротивление всего участка цепи в зависимости

от времени определяется соотношением
$$R = \frac{\rho l}{a(2a - vt)} + \frac{\frac{\rho l}{2a^2} \cdot \frac{\rho l}{2a(a - vt)}}{\frac{\rho l}{2a^2} + \frac{\rho l}{2a(a - vt)}}$$

Заметим, что момент времени, когда резистор №3 станет диэлектриком, наступит раньше, чем момент времени, когда сопротивление электрической схемы увеличится в три раза (по сравнению с исходным значением).

После этого сопротивление электрической схемы определяется соотношением $R = \frac{\rho l}{a(a - vt)} + \frac{\rho l}{2a^2}$.

Уравнение для определения момента времени после повреждения оболочки, когда сопротивление электрической схемы увеличится в три раза, можно записать следующим образом:

$R(t = 0) = \frac{1}{3}R(t')$, где t' – искомый момент времени.

Подставляя в это уравнение соотношение для R , найдем, что $t' = \frac{10a}{7v} \approx 6$ дней.

Ответ: 6 дней.

Задача 3 (20 баллов).

Некоторые разновидности витаминов способны в определенном количестве вырабатываться самим организмом, но многие должны поступать внутрь с пищей. При скудном рационе питания в качестве надежного источника этих биологически активных веществ могут выступать пищевые добавки, содержащие целый комплекс витаминов. Ретинол является синтетическим аналогом природного витамина А, входящим в большое число витаминных комплексов. Ретинол играет важную роль в синтезе белков, липидов, мукополисахаридов, регулирует баланс минералов. Технологическая схема производства синтетического витамина А – ретинола состоит из нескольких стадий, первой из которых является получение вещества I согласно схеме 1.

В стальной реактор загружают вещество А, затем едкий кали и нагревают при интенсивном перемешивании. Спустя несколько часов полученную смесь охлаждают и насыщают веществом Х. По окончании реакции выделяют бесцветную жидкость В, хорошо растворимую в органических растворителях. Вещество В подвергают селективному гидрированию с получением вещества С, которое при конденсации с веществом $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{COOC}_2\text{H}_5$ приводит к получению вещества D. Реакционную смесь продолжают нагревать до прекращения выделения углекислого газа в результате получается вещество Е. Вещество Е при нагревании реагирует с порошковым едким кали и веществом Х с получением прозрачной жидкости F, плохо растворимой в воде. При ацилировании вещества F получается вещество G, которое способно вступать в реакцию изомеризации, одним из продуктов которой является вещество H омыление которого приводит к получению желтоватой маслянистой жидкости I, хорошо растворимой в органических растворителях.

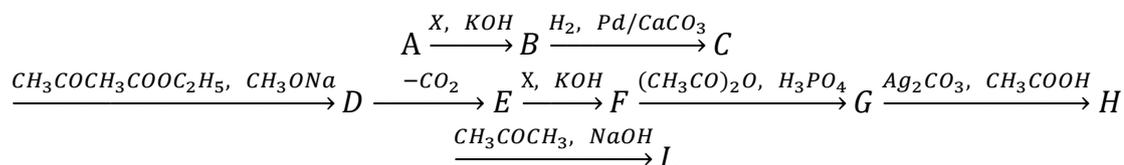
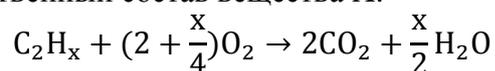


Схема 1

- 1) Установите структурные формулы веществ А и Х, если известно, что вещество Х является газообразным углеводородом состава C_2H_x . При взаимодействии 7 см^3 C_2H_x с кислородом, взятым в избытке, объем смеси уменьшился на $3,5 \text{ см}^3$. Реакция протекает при температуре 110°C и давлении 1 атм. Содержание углерода по массе в веществе А на 30,2% меньше, чем в веществе Х.
- 2) Приведите структурные формулы всех вышеупомянутых органических соединений В – I. Вещество I было синтезировано немецким химиком в попытках получить аналог цветочного масла во второй половине XIX века. Содержание углерода по массе в веществе I на 19,15% меньше, чем в веществе А.

Решение:

- 1) Рассчитаем количественный состав вещества Х:



$$V(C_2H_x) = 7 \text{ см}^3$$

$$V(O_2) = 7 \left(2 + \frac{x}{4}\right) \text{ см}^3$$

$$V(CO_2) = 14 \text{ см}^3$$

$$V(H_2O) = \frac{7x}{2} \text{ H}_2\text{O}$$

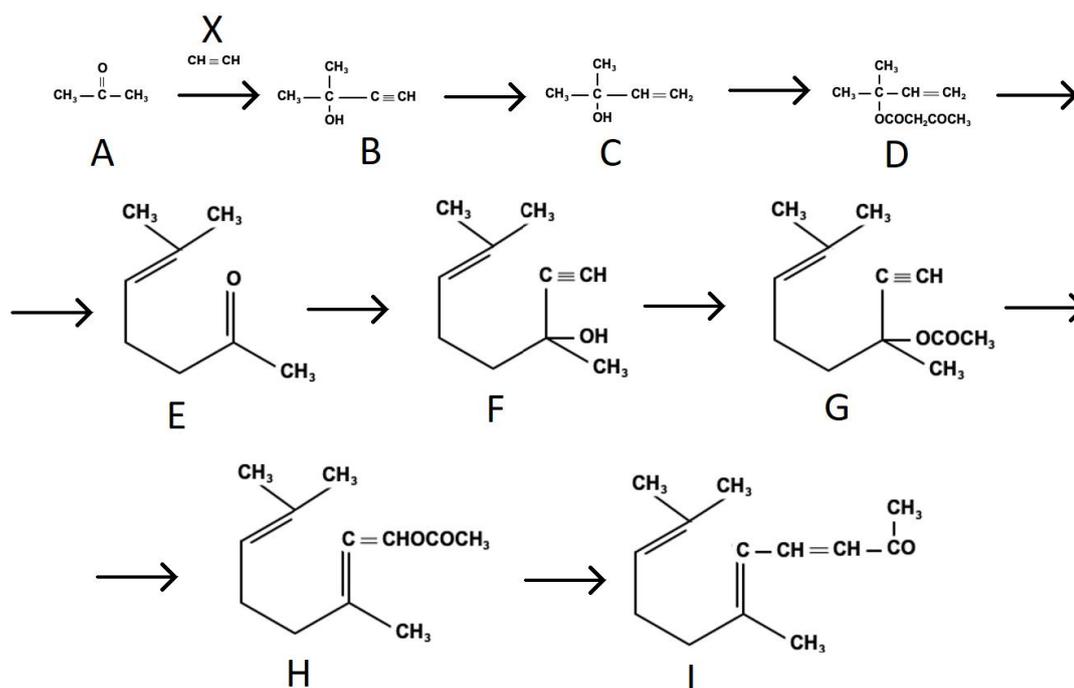
Учитывая уменьшение объема на $3,5 \text{ см}^3$:

$$7 + 7 \left(2 + \frac{x}{4}\right) = 14 + \frac{7x}{2} + 3,5$$

$$x = 2$$

Следовательно, формулой вещества X является C_2H_2 .

- 2) В соответствии с условиями задачи, структурные формулы вышеупомянутых органических соединений:



- 3) Подтвердим состав веществ А и I расчетами:

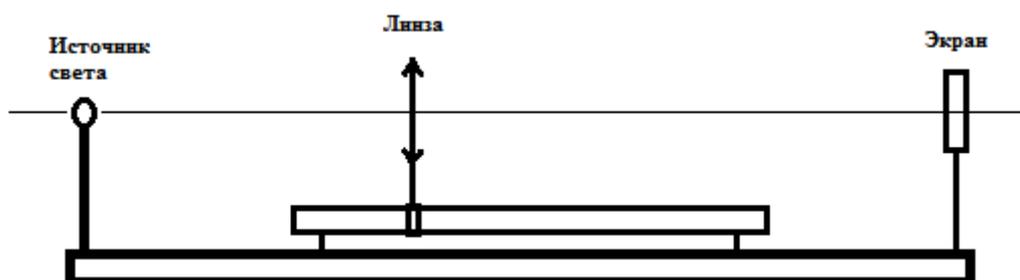
Массовая доля углерода в ацетилене: $\omega_c(C_2H_2) = 92,3\%$

Массовая доля углерода в ацетоне: $\omega_c((CH_3)_2CO) = 62,1\%$

Массовая доля углерода в молекуле псевдоионона I: $\omega_c(\text{псевдоионона}) = 81,25\%$, что соответствует условию задачи.

Задача 4 (20 баллов).

Для определения силы света точечного источника инженер Леонид собрал установку, состоящую из горизонтальной станины, на которой закреплены сам источник, круглая тонкая собирающая линза и круглый экран, причем ось симметрии экрана совпадает с главной оптической осью линзы и проходит через источник света (см. рисунок).



Расстояние между источником света и экраном составляет 50 см, диаметр линзы равен 10 см, ее оптическая сила равна 10 дптр, диаметр экрана равен 10 см. Линза закреплена на горизонтальной штанге, позволяющей передвигать линзу так, что расстояние от нее до экрана может составлять от 15 см до 35 см.

Поверхность экрана покрыта солнечной панелью с ЭДС, равной 10 В. Максимальная возможная мощность, вырабатываемая солнечной панелью с 1 см^2 ее площади, составляет 0,1 Вт. К солнечной панели подключено реле, срабатывающее при силе тока в цепи не менее 0,3 А.

Сможет ли Леонид определить силу света источника, используя только собранную установку (включающую электрическую цепь с солнечной панелью и реле)? Если да, то каким образом? Ответ поясните.

Решение:

Обозначим расстояние между источником и экраном через L , расстояние между источником и линзой – x , фокусное расстояние линзы – f , диаметр линзы – d . По условию и источник, и экран находятся за пределами фокусных расстояний линзы. Найдем диаметр светового пятна на экране. Это пятно образовано всеми лучами, проходящими через линзу, то есть его края образованы лучами, проходящими через края линзы. По формуле тонкой линзы изображение источника будет находиться на расстоянии $\frac{xf}{x-f}$ от линзы.

Тогда из подобия треугольников диаметр пятна будет равен $\frac{d(L-x-\frac{xf}{x-f})}{\frac{xf}{x-f}} = \frac{d(Lx-x^2-Lf)}{xf} =$

$$\frac{d}{f}(L - x - \frac{Lf}{x}) \leq \frac{d}{f}(L - 2\sqrt{Lf})$$

(так как по неравенству между средним арифметическим и

средним геометрическим $x + \frac{Lf}{x} \geq 2\sqrt{Lf}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = \frac{Lf}{x} = \sqrt{Lf}$). Подставляя значения переменных из условия, получаем, что максимальный диаметр пятна равен 5,3 см и достигается, когда линза находится на расстоянии 22,4 см от источника. При этом площадь пятна равна 22 см², а максимальная вырабатываемая солнечной панелью с этой площади мощность составляет 2,2 Вт. Тогда максимальная сила тока в цепи не превосходит 0,22 А и не вызовет срабатывания реле. А это значит, что собранная Леонидом установка никак не будет реагировать на движение линзы, поэтому определить силу света источника, пользуясь только собранной установкой, Леонид не сможет.

Ответ: не сможет.

Задача 5 (20 баллов).

Перед поездкой из Казани в Псков инженер Василий обнаружил, что давление в левом заднем колесе его легкового автомобиля равно не 2,0 атм, как в правом заднем колесе, а только 1,8 атм, хотя некоторое время назад давление в колесах было одинаковым. Чтобы найти причину падения давления в колесе, Василий погрузил его целиком в воду на небольшую глубину. Приглядевшись, он увидел пузырьки диаметром около 3 мм, появляющиеся на поверхности крышки в одном и том же месте приблизительно один раз в 10 секунд. Сможет ли Василий совершить запланированную поездку, накачав колесо до 2,0 атм в начале маршрута и больше не подкачивая его до Пскова, если минимальное допустимое давление в заднем колесе равно 1,7 атм?

Решение:

Будем считать, что скорость потери воздуха в колесе движущегося автомобиля такая же, как и в колесе, находящемся в воде, и пренебрежем нагревом воздуха в колесе при движении. Оценим массу воздуха в одном пузырьке m и массу воздуха M , который должен выйти из колеса, чтобы давление в нем упало до минимального допустимого значения. Поскольку колесо погружалось на небольшую глубину, давление воздуха в выходящем из него пузырьке было равно атмосферному давлению p_0 , так что масса содержащегося в нем воздуха была равна $m = \frac{p_0 \mu}{RT} V_{\text{п}}$, где $\mu = 29$ г/моль – молярная масса воздуха, T – температура воздуха в пузырьке (которую для оценки можно принять равной 300 К), R – универсальная газовая постоянная, а $V_{\text{п}} = \frac{4\pi r^3}{3}$ – объем пузырька ($r = 1,5$ мм – радиус пузырька). Если $p_1 = 2,0$ атм – начальное давление, а $p_2 = 1,7$ атм – минимальное допустимое давление в колесе, то масса M воздуха, вышедшего из колеса при падении давления в нем от p_1 до p_2 , равна $M = \frac{(p_1 - p_2)\mu}{RT} V_{\text{к}}$, где $V_{\text{к}}$ – объем воздуха, содержащегося в колесе (в камере колеса или в объеме, ограниченном диском колеса и бескамерной крышкой). Считая для простоты поперечное сечение крышки прямоугольником с шириной d и высотой h , объем $V_{\text{к}}$ можно приближенно найти как $2\pi R d h$, где R – средний радиус крышки. Для крышки легкового автомобиля для оценки можно взять $R = 25$

см, $d = 20$ см, $h = 15$ см. Таким образом, для падения давления в колесе от p_1 до p_2 из него должно выйти $N = \frac{M}{m} = \frac{(p_1 - p_2)V_k}{p_0 V_{\Pi}} = \frac{3(p_1 - p_2)Rdh}{2p_0 r^3}$ пузырьков, на что потребуется время $t = N\tau$, где $\tau = 10$ с – время между появлениями двух пузырьков. Подставив приведенные численные значения для R , d и h , получаем $t = 10^7$ с ≈ 116 суток. Поскольку расстояние от Казани до Пскова по автомобильным дорогам составляет приблизительно 1600 км, т.е. вся дорога занимает два-три дня, Василий сможет доехать до конечной точки своего маршрута, ни разу не подкачивая по пути колесо.

Ответ: сможет.