

**Решения заданий заключительного этапа
Олимпиады «Ломоносов» по инженерным наукам 2019/2020
11 класс**

Задача 1 (20 баллов)

Почему при приближении источника открытого огня на небольшое расстояние к луже бензина лужа вспыхивает, а в случае с лужей жидкого мазута этого не происходит?

Решение:

Одна из основных причин указанного в условии явления – более высокое давление насыщенного пара бензина по сравнению с давлением насыщенного пара мазута, приводящее к образованию горючей смеси паров бензина с воздухом вблизи поверхности лужи бензина.

Задача 2 (20 баллов)

После чистки вытяжного шкафа в химической лаборатории в нем оставили прислоненную к гладкой вертикальной стене лестницу. На нижней ступеньке этой лестницы забыли включенную в сеть электрическую плитку, на которой стояла легкая склянка с гексогидратом нитрата кобальта массой $m_1 = 1,2$ кг. Упадет ли лестница через достаточно большой промежуток времени, если первоначально она стояла под углом $\alpha_0 = 57^\circ$ к горизонту, ее масса $M = 2$ кг, масса электроплитки $m_2 = 0,4$ кг, а коэффициент трения покоя между лестницей и полом $\mu = 0,2$? Высотой нижней ступеньки над полом пренебречь.

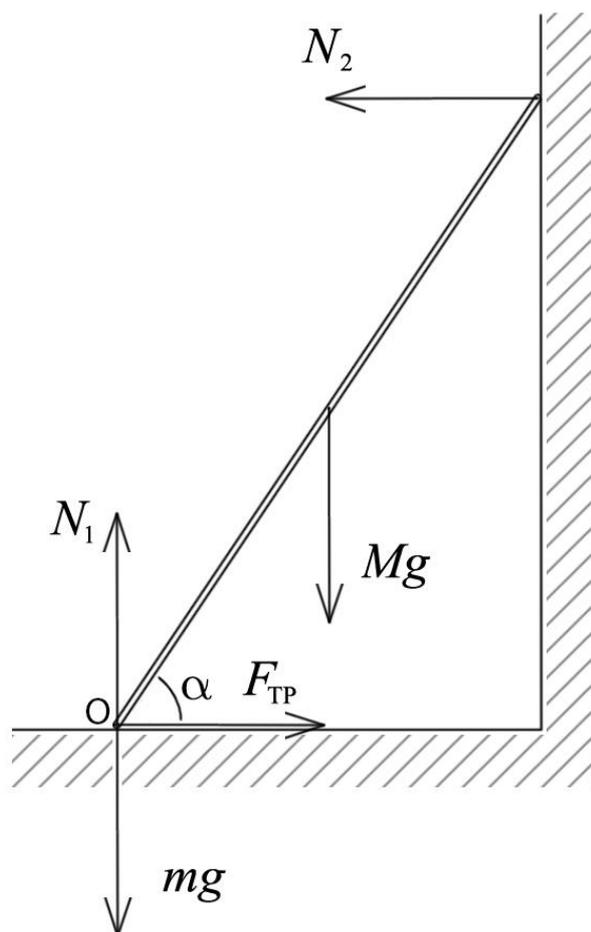
Решение:

Пусть L – длина лестницы, g – ускорение свободного падения, α – угол, который лестница образует с горизонтом, N_1 и N_2 – силы реакции, действующие на лестницу со стороны пола и стены соответственно (см. рисунок), а m – суммарная масса плитки и содержимого склянки (массой склянки пренебрегаем). Тогда, пренебрегая высотой первой ступеньки лестницы над полом, условия равновесия лестницы можно записать следующим образом (см. рисунок):

$$(M + m)g = N_1, \quad F_{\text{тр}} = N_2 \text{ (уравновешенность сил),}$$

$$\frac{Mg}{2}L \cos \alpha = N_2L \sin \alpha \text{ (уравновешенность моментов относительно точки O),}$$

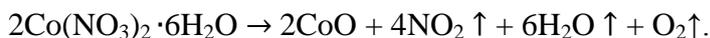
$$F_{\text{тр}} \leq \mu N_1 \text{ (ограничение на величину силы трения покоя).}$$



Из этих уравнений получаем

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{2\mu} \frac{1}{1+m/M}, \text{ т.е. } \alpha_{\min} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{1}{1+m/M} \right).$$

В начальный момент $m = m_1 + m_2 = 1,6$ кг, поэтому $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}(1,3889) = 54,2461^\circ < \alpha_0$. При нагревании гексагидрат нитрата кобальта разлагается в соответствии с уравнением



Поскольку молярная масса $\operatorname{Co}(\operatorname{NO}_3)_2 \cdot 6\operatorname{H}_2\operatorname{O}$ равна $59 + (14 + 48) \cdot 2 + 18 \cdot 6 = 291$ г/моль, количество кристаллогидрата в склянке в начальный момент было $\nu(\operatorname{Co}(\operatorname{NO}_3)_2 \cdot 6\operatorname{H}_2\operatorname{O}) = 1200/291 = 4,1237$ моль; следовательно, $\nu(\operatorname{CoO}) = 4,1237$ моль, и масса оставшегося после нагревания в склянке оксида кобальта $m'_2 = m(\operatorname{CoO}) = 4,1237 \cdot 75 = 0,3093$ кг.

Таким образом, после разложения 1,2 кг гексагидрата нитрата кобальта суммарная масса плитки со стоящей на ней склянкой с оксидом кобальта станет равной $m' = m_1 + m'_2 = 0,7093$ кг. Поэтому после разложения гексагидрата нитрата кобальта минимальный угол наклона к горизонту, при котором лестница еще не будет падать, станет равным $\alpha'_{\min} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{1}{1+m'/M} \right) = 61,5487^\circ > \alpha_0$.

Следовательно, лестница упадет.

Ответ: упадет.

Задача 3 (20 баллов)

Водород является универсальным энергоносителем благодаря его экологической чистоте и эффективности энергетических процессов с его участием. Способы производства водорода имеют широкую сырьевую базу и активно развиваются. Однако низкая температура сжижения, высокая взрывоопасность и низкая плотность водорода выдвигают на первый план проблему его безопасного хранения и транспортировки. Одним из способов решения этой проблемы является хранение водорода в обратимо гидрируемых органических соединениях. В реакции гидрирования в качестве исходных органических веществ используются вещества А, В и С. Плотности предельно гидрированной формы веществ А, В и С приведены в таблице:

	Плотность, кг/м ³
Предельно гидрированная форма вещества А	779
Предельно гидрированная форма вещества В	770
Предельно гидрированная форма вещества С	896

Известно, что вещества А и В являются ближайшими гомологами, при этом вещество В - родоначальник гомологического ряда, молекула которого представляет собой правильный n-угольник, в котором расстояние между наиболее удаленными атомами углерода в два раза больше, чем между ближайшими атомами углерода. Молекула вещества С содержит на четыре атома углерода больше, чем молекула вещества В. О веществе С известно, что оно используется для защиты шерстяных изделий от моли.

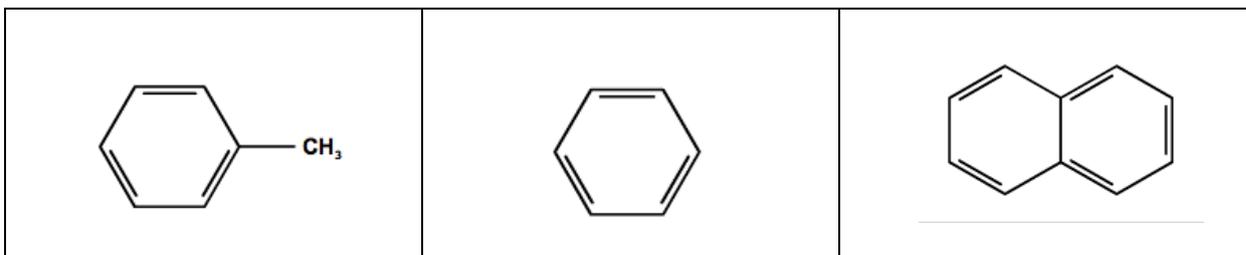
1. Приведите структурные формулы веществ А, В и С.
2. Выберите наиболее эффективное органическое вещество (А, В или С) с точки зрения предельного числа атомов транспортируемого водорода, связанного с одной молекулой органического вещества.
3. Оцените эффективность транспортировки 2000 м³ газообразного (при н.у.) водорода в обратимо гидрируемом органическом соединении, выбранном в пункте 2, в сравнении с транспортировкой того же количества водорода в газовых баллонах. Под эффективностью понимается выигрыш в объеме перевозимого газообразного водорода по сравнению с объемом предельно гидрированной формы органического вещества. Условия хранения водорода в газовых баллонах: давление 5 МПа при температуре -10 °С.

Решение:

Правильный n-угольник, в котором расстояние между наиболее удаленными вершинами в два раза больше, чем между ближайшими – шестиугольник. Углеводород, молекула которого является правильным шестиугольником и само вещество – родоначальник гомологического ряда – бензол. Соответственно, вещество В это бензол, а его ближайший гомолог вещество А – толуол.

По условию вещество С содержит на четыре углерода больше, чем вещество В, значит в состав его молекул входит 10 углеродов. Углеводород с таким количеством атомов углерода, а также используемый для борьбы с молью это нафталин.

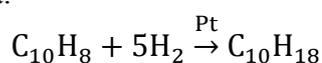
Вещество А	Вещество В	Вещество С
------------	------------	------------



Наиболее эффективное органическое вещество с точки зрения предельного числа атомов транспортируемого водорода на одну молекулу органического вещества – нафталин. При полном протекании реакции гидрирования на одну молекулу толуола и бензола запасается три молекулы водорода, на одну молекулу нафталина – пять.

Проведем расчет для двух способов транспортировки водорода.

1) Расчет объема для случая транспортировки в обратимо гидрируемом соединении.
Реакция гидрирования нафталина:



$$V(\text{H}_2) = 2000 \text{ м}^3 = 2 \cdot 10^6 \text{ л}$$

$$\nu(\text{H}_2) = \frac{V(\text{H}_2)}{V_m} = 0,089 \cdot 10^6 \text{ моль}$$

$$\nu(\text{C}_{10}\text{H}_{18}) = 0,018 \cdot 10^6 \text{ моль}$$

$$m(\text{C}_{10}\text{H}_{18}) = \nu(\text{C}_{10}\text{H}_{18}) \cdot M(\text{C}_{10}\text{H}_{18}) = 138 \cdot 0,018 \cdot 10^6 = 2,46 \cdot 10^6 \text{ г} = 2,46 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$V(\text{C}_{10}\text{H}_{18}) = \frac{m(\text{C}_{10}\text{H}_{18})}{\rho(\text{C}_{10}\text{H}_{18})} = 2,75 \text{ м}^3.$$

2) Расчет объема для случая транспортировки в баллонах.

$$V(\text{H}_2) = 2000 \text{ м}^3 = 2 \cdot 10^6 \text{ л}$$

$$\nu(\text{H}_2) = \frac{V(\text{H}_2)}{V_m} = 0,089 \cdot 10^6 \text{ моль}$$

$$\text{По уравнению Менделеева-Клапейрона } V_{\text{баллонов}} = \frac{\nu RT}{p} = \frac{0,089 \cdot 10^6 \cdot 8,31 \cdot 263,15}{5 \cdot 10^6} = 38,92 \text{ м}^3.$$

Таким образом, выигрыш в объеме перевозимого газообразного водорода по сравнению с объемом предельно гидрированной формы органического вещества составляет $\frac{V_{\text{баллонов}}}{V(\text{C}_{10}\text{H}_{18})} \approx 14$ раз.

Задача 4 (20 баллов)

Современные солнечные электростанции башенного типа основаны на принципе нагрева жидкого теплоносителя с помощью солнечного излучения. В центре станции стоит башня, на вершине которой находится резервуар с теплоносителем. Вокруг башни на некотором расстоянии располагаются гелиостаты – большие зеркала, которые за счет автоматической системы фокусировки в любой момент времени направляют отраженное солнечное излучение точно на резервуар (см. рисунки 1 и 2).

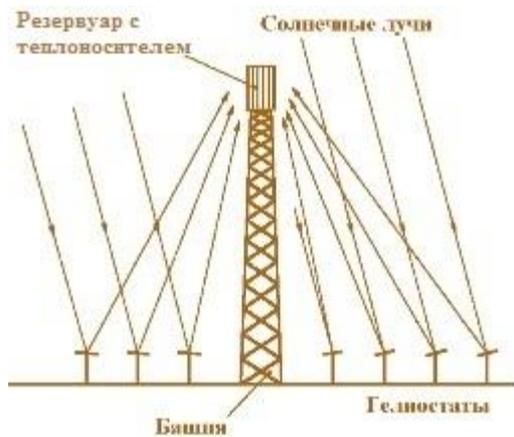


Рисунок 1

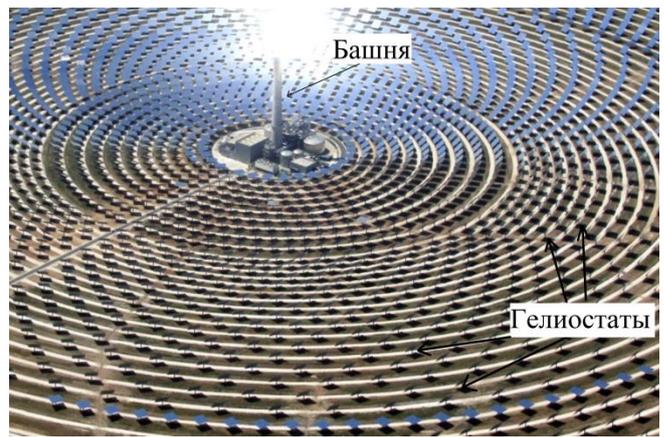


Рисунок 2

Тепловая энергия жидкого теплоносителя преобразуется в электрическую, которая распределяется между потребителями электроэнергии.

Резервуар с теплоносителем находится на высоте 150 м. Первое кольцо гелиостатов находится на расстоянии 120 м от башни, последнее – на расстоянии 410 м от башни. Расстояние между соседними кольцами гелиостатов равно 10 м, расстояние между соседними гелиостатами в одном кольце – около 6 м. Все гелиостаты дают одинаковый вклад в производимую электростанцией энергию.

Пусть в некоторый момент времени из-за длительного подземного пожара в воздухе появилась дымка, из-за которой по пути к резервуару от гелиостата, находящегося на расстоянии d м от резервуара, теряется $0,0001d^2$ процентов энергии солнечного излучения.

На сколько процентов при этом уменьшилась вырабатываемая электростанцией мощность?

Решение:

Сначала найдем, из какого числа гелиостатов состоит n -ое от центра кольцо гелиостатов. Это кольцо находится на расстоянии $(110 + 10n)$ м от башни, поэтому периметр кольца равен $2\pi(110 + 10n)$ м. Так как расстояние между соседними гелиостатами в кольце равно около 6 м, n -ое от центра кольцо состоит из $\frac{2\pi(110+10n)}{6} = \frac{\pi(110+10n)}{3}$ гелиостатов.

Тогда всего в электростанции используются $\sum_{n=1}^{30} \frac{\pi(110+10n)}{3}$ гелиостатов.

Все гелиостаты в n -ом от центра кольце находятся на расстоянии $\sqrt{(110 + 10n)^2 + 150^2}$ м от резервуара. Если до появления дымки каждый вклад каждого гелиостата в производимую электростанцией энергию составлял E_0 МВт·ч, то после появления дымки потери энергии на каждом гелиостате, находящемся в n -ом от центра кольце, составляют $E_0 \cdot 10^{-6} \cdot ((110 + 10n)^2 + 150^2)$ МВт·ч.

Потери на n -ом от центра кольце составляют

$$\frac{\pi(110+10n)}{3} \cdot E_0 \cdot 10^{-6} \cdot ((110 + 10n)^2 + 150^2) \text{ МВт}\cdot\text{ч},$$

а суммарные потери энергии из-за дымки составляют

$$\sum_{n=1}^{30} \frac{\pi(110+10n)}{3} \cdot E_0 \cdot 10^{-6} \cdot ((110 + 10n)^2 + 150^2) \text{ МВт}\cdot\text{ч}.$$

Тогда относительное уменьшение производимой электростанцией энергии составляет

$$\frac{\sum_{n=1}^{30} \frac{\pi(110+10n)}{3} E_0 \cdot 10^{-6} \cdot ((110+10n)^2 + 150^2)}{\sum_{n=1}^{30} E_0 \frac{\pi(110+10n)}{3}} = \frac{\sum_{n=1}^{30} \frac{(110+10n)}{3} \cdot 10^{-6} \cdot ((110+10n)^2 + 150^2)}{\sum_{n=1}^{30} \frac{(110+10n)}{3}} = 10^{-6}.$$

$$\frac{\sum_{n=1}^{30} ((110+10n)^3 + 150^2 \cdot \sum_{n=1}^{30} (110+10n))}{\sum_{n=1}^{30} ((110+10n)^3)} = 10^{-4} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{30} (11+n)^3}{\sum_{n=1}^{30} (11+n)} + 0,0225 = 10^{-4} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{41} n^3 - \sum_{n=1}^{11} n^3}{795} + 0,0225.$$

Выведем формулу для суммы кубов первых k натуральных чисел. Из общих соображений можно предположить, что это многочлен четвертой степени от k , то есть:

$$\sum_{n=1}^k n^3 = Ak^4 + Bk^3 + Ck^2 + Dk + E.$$

Подставляя вместо k натуральные числа от 1 до 5, получаем систему из пяти линейных уравнений с пятью неизвестными A, B, C, D, E , из которой получаем:

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{4}, D = 0, E = 0. \text{ Тогда}$$

$$\sum_{n=1}^k n^3 = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Докажем эту формулу методом математической индукции. Очевидно, формула верна при $k = 1$. Докажем, что если формула верна для первых k натуральных чисел, то она верна и для первых $(k + 1)$ натурального числа. Действительно,

$$\sum_{n=1}^{k+1} n^3 = \sum_{n=1}^k n^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2 + (k+1)^3 = \frac{1}{4}(k+1)^4 + \frac{1}{2}(k+1)^3 + \frac{1}{4}(k+1)^2, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Тогда $\sum_{n=1}^{41} n^3 - \sum_{n=1}^{11} n^3 = 741321 - 4356 = 736965$, а относительное уменьшение производимой электростанцией энергии составляет

$$10^{-4} \cdot \frac{736965}{795} + 0,0225 = 0,1152 \approx 12\%.$$

Задача 5 (20 баллов)

Для испытания на герметичность химического реактора объемом V его решили заполнить аргоном при высоком давлении p_1 . Аргон хранится в баллонах и нагнетается в реактор поршневым насосом с рабочим объемом V_0 . Сначала открывают вентиль на баллоне, подсоединенном через рабочую камеру насоса к реактору, и в системе реактор + насос + баллон устанавливается давление $p_0 < p_1$. Затем насос совершает N рабочих циклов, и давление в реакторе повышается до p_1 . После проведения испытаний для сбрасывания давления в реакторе берут точно такой же насос, переделанный для откачивания газа, и, подсоединив его к реактору, делают M циклов откачивания.

- 1) Какое число рабочих циклов N должен был сделать первый насос, чтобы давление в реакторе стало равным p_1 ?
- 2) Чему стало равно давление аргона в реакторе после откачки?
- 3) Пусть $M = N > 1$. Что можно сказать о давлении в реакторе после откачки в этом случае: оно будет больше или меньше p_0 ?

Считать, что объем баллона гораздо больше рабочего объема насоса и объема реактора, так что в процессе накачивания аргона в реактор давление газа в баллоне не меняется и все время остается равным p_0 . Изменением температуры аргона пренебречь.

Решение:

После одного цикла в режиме накачки аргон, находящийся в камере насоса объемом V_0 при давлении p_0 , попадает в реактор объемом V . В соответствии с законом Бойля-Мариотта это приводит к повышению давления в реакторе на $\Delta p = p_0 \frac{V_0}{V}$. Поэтому после N циклов накачки давление в реакторе будет равно

$$p_1 = p_0 + N\Delta p = p_0 \left(1 + N \frac{V_0}{V}\right), \text{ откуда } N = \frac{V}{V_0} \frac{p_1 - p_0}{p_0}.$$

При каждом цикле откачки давление в реакторе падает в $\frac{V+V_0}{V} = \left(1 + \frac{V_0}{V}\right)$ раз. Если после повышения давления в реакторе до p_1 откачивающий насос сделает M циклов, то давление в реакторе упадет до

$$p_2 = \frac{p_1}{\left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^M} = p_0 \frac{\left(1 + N \frac{V_0}{V}\right)}{\left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^M}.$$

Отсюда следует, что при $M = N > 1$

$\frac{p_2}{p_0} = \frac{(1+Nx)}{(1+x)^N}$, где $x = \frac{V_0}{V} > 0$. Поскольку для $x > 0$ справедливо неравенство Бернулли $(1+x)^N > 1+Nx$, давление p_2 в реакторе будет меньше p_0 .