

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2020-2021
МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Существует ли такое число x , что все три числа

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2021}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2 + 2021} - \frac{1}{x}$$

являются целыми?

(7 баллов)

2. Решите уравнение

$$\sin x + \sin^3 x + 2020 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2020 \cdot \cos^5(2x).$$

(7 баллов)

3. Пусть $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, $n > 1$, n – целое число. Возможно ли представить $f(x)$ в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами? Ответ объясните.

(7 баллов)

4. Найдите все значения $a > 0$, при которых существуют положительные решения x неравенства

$$\frac{x^3}{a + \sqrt[3]{2020^4 \cdot x}} + \frac{\sqrt[3]{2020^4 \cdot x}}{a + x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{x \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2020^4})}.$$

(7 баллов)

5. Известно, что площадь выпуклого четырехугольника равна 32, а сумма длин двух противоположных сторон и одной диагонали равна 16. Какие значения может принимать длина другой диагонали?

(7 баллов)

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада 2020-2021
МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап
Вариант 2

1. Существует ли такое число x , что все три числа

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2020}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2 + 2020} - \frac{1}{x}$$

являются целыми?

(7 баллов)

2. Решите уравнение

$$\sin x + \sin^3 x + 2021 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2021 \cdot \cos^5(2x).$$

(7 баллов)

3. Пусть $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, n – целое число. Возможно ли представить $p(t)$ в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами? Ответ объясните.

(7 баллов)

4. Найдите все значения $k > 0$, при которых существуют положительные решения x неравенства

$$\frac{x^3}{k + \sqrt[3]{2021^4 \cdot x}} + \frac{\sqrt[3]{2021^4 \cdot x}}{k + x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{k}{x \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2021^4})}.$$

(7 баллов)

5. На плоскости рассматривается треугольник ABC , внутри которого выбрана точка P , а точки M , N , K являются ортогональными проекциями точки P на прямые BC , AC и AB соответственно. Найдите все точки P , для которых сумма $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ минимальна.

(7 баллов)

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!