МАТЕМАТИКА (9 класс)
Заключительный этап 2020–2021
Вариант 1

1. Вычислите $\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}$ при $a=-1,\underbrace{4\ldots 44}_{2021}$, $b=-1,\underbrace{5\ldots 55}_{2020}6$.

(7 баллов)

Ответ: –27.

Решение:

$\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2} = 2ab(a+b)+(a^2+b^2)(a+b)=(a+b)^3=$

$(-3)^3=-27.$

2. Найдите все тройки целых чисел (x,y,z), которые удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{cases}x^2+2y^2-2y\cdot z=100,\\ 2x\cdot y-z^2=100.\end{cases}$$

(7 баллов)

Ответ: $(10,10,10)$, $(-10,-10,-10)$.

Решение:

Вычтем из первого второе уравнение и выделим полные квадраты:

$(x-y)^2+(y-z)^2=0, \Rightarrow \begin{cases}x=y,\\ y=z4;\end{cases} \Rightarrow\ x=y=z.$

Подставим $x=y=z$ в первое уравнение, получим, что $x^2=100$, $x=\pm10$.
Следовательно, (10,10,10), $(-10,-10,-10)$.

3. Известно, что графики функций $y=x^2+ax+b$ и $y=x^2+cx+d$ имеют общую точку $(1;1)$. Возможно ли, чтобы $a^{2021}+d^{2020}>c^{2020}-b^{2021}$? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Так как графики функций $y=x^2+ax+b$ и $y=x^2+cx+d$ имеют общую точку $(1;1)$, то $\begin{cases}1=1+a+b,\\ 1=1+c+d;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-b,\\ d=-c;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^{2021}=-b^{2021},\\ d^{2020}=c^{2020};\end{cases}$

Сложим последние равенства и получим, что $a^{2021}+d^{2020}=c^{2020}-b^{2021}$.

4. Докажите, что для любых чисел $a,\ b,\ c$ выполняется неравенство

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2bc+b^2ac+c^2ab.$$

(7 баллов)

Решение:

Докажем, что $\begin{cases} a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2, \\ a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab, \end{cases}$ откуда будет следовать доказательство исходного неравенства.

1) Сложим почленно 3 верных неравенства:

$a^4+b^4-2a^2b^2 \geq 0, \quad b^4+c^4-2b^2c^2 \geq 0, \quad a^4+c^4-2a^2c^2 \geq 0$

и получим $2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2 \geq 0$. Следовательно,

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2.$$

2) Сложим почленно 3 верных неравенства:

$a^2(b^2+c^2-2bc) \geq 0, \quad b^2(a^2+c^2-2ac) \geq 0, \quad c^2(a^2+b^2-2ab) \geq 0$

и получим $2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab \geq 0$. Следовательно,

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab.$$

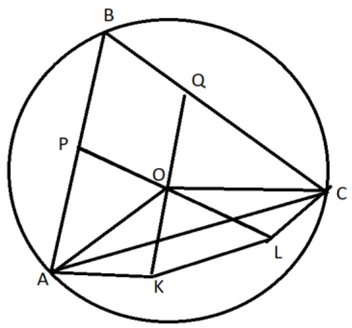
5. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC поставлены две точки P и Q соответственно, причем угол AOC в два раза больше угла POQ, где точка О − центр описанной окружности. Возможно ли, чтобы периметр треугольника PBQ оказался меньше длины стороны AC? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Построим точки K и L так, что $OK=OM$, $OL=ON$ и $\angle POB = \angle KOA$, $\angle QOB = \angle COL$.



Треугольник KOA равен треугольнику POB, а треугольник COL равен треугольнику BOQ по двум сторонам и углу между ними.

Так как $\angle KOL = \angle AOC - (\angle KOA + \angle LOC) = \angle AOC - \angle POQ$ и угол AOC в два раза больше угла POQ (по условию), то $\angle KOL = \angle POQ$, добавим сюда $OK=OM$, $OL=ON$, получим, что треугольник KOL равен треугольнику POQ. Следовательно, $KL = PQ$.

Тогда периметр треугольника PBQ равен:

$$P_{PBQ} = BQ + PQ + BQ = AK + KL + LC \geq AC.$$

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

МАТЕМАТИКА (9 класс)
Заключительный этап 2020–2021
Вариант 2

1. Вычислите $\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2} - \frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}$ при $a = -1,\underbrace{7\ldots77}_{2021}$, $b = -1,\underbrace{2\ldots22}_{2020}3$.

(7 баллов)

Ответ: –27.

Решение:

$\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2} - \frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2} = 2ab(a+b) + (a^2+b^2)(a+b) = (a+b)^3 =$

$(-3)^3 = -27$.

2. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z), которые удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2y \cdot z = 900, \\ 2x \cdot y - z^2 = 900. \end{cases}$$

(7 баллов)

Ответ: $(30, 30, 30)$, $(-30, -30, -30)$.

Решение:

Вычтем из первого второе уравнение и выделим полные квадраты:

$(x-y)^2 + (y-z)^2 = 0, \Rightarrow \begin{cases} x = y, \\ y = z; \end{cases} \Rightarrow \ x = y = z.$

Подставим $x = y = z$ в первое уравнение, получим, что $x^2 = 900$, $x = \pm 30$.
Следовательно, (30,30,30), $(-30, -30, -30)$.

3. Известно, что графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ имеют общую точку $(1; 1)$. Возможно ли, чтобы $a^{2023} + d^{2020} < c^{2020} - b^{2023}$? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Так как графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ имеют общую точку $(1; 1)$, то $\begin{cases} 1 = 1 + a + b, \\ 1 = 1 + c + d; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b, \\ d = -c; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{2023} = -b^{2023}, \\ d^{2020} = c^{2020}; \end{cases}$

Сложим последние равенства и получим, что $a^{2023} + d^{2020} = c^{2020} - b^{2023}$.

4. Докажите, что для любых чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^4 - a^2bc + b^4 - b^2ac \geq c^2ab - c^4.$$

(7 баллов)

Решение:

Перепишем неравенство в виде

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab.$$

Докажем, что $\begin{cases} a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2, \\ a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab, \end{cases}$ откуда будет следовать доказательство исходного неравенства.

1) Сложим почленно 3 верных неравенства:

   $a^4+b^4-2a^2b^2 \geq 0, \quad b^4+c^4-2b^2c^2 \geq 0, \quad a^4+c^4-2a^2c^2 \geq 0$

   и получим $2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2 \geq 0$. Следовательно,

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2.$$

2) Сложим почленно 3 верных неравенства:

   $a^2(b^2+c^2-2bc) \geq 0, \quad b^2(a^2+c^2-2ac) \geq 0, \quad c^2(a^2+b^2-2ab) \geq 0$

   и получим $2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-2a^2bc-2b^2ac-2c^2ab \geq 0$. Следовательно,

$$a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab.$$

5. В треугольнике *MNK* на сторонах *MN* и *NK* поставлены две точки *P* и *Q* соответственно, причем угол *MOK* в два раза больше угла *POQ*, где точка *O* − центр описанной окружности. Возможно ли, чтобы периметр треугольника *PNQ* оказался меньше длины стороны *MK*? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Решение аналогичной задачи подробно разобрано в варианте 1.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.