МАТЕМАТИКА (8 класс)
Заключительный этап (2020–2021)
Вариант 1

1. Вычислите $\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a^4-b^4)(a-b)}{a^2-b^2}$ при $a=1,\underbrace{7\dots77}_{2021}$, $b=-2,\underbrace{2\dots22}_{2020}3$.

(7 баллов)

Ответ: –64.

Решение:

$$\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a^4-b^4)(a-b)}{a^2-b^2}=2ab(a-b)-(a^2+b^2)(a-b)=-(a-b)^3=-4^3=-64.$$

2. Решите в целых числах уравнение

$$(x-2021)^2-y^2+2y=14.$$

(7 баллов)

Ответ: (2028;7), (2014;–5), (2028;–5), (2014;7).

Решение:

$$(x-2021)^2-(y-1)^2=13,$$
$$(x-2021-y+1)\cdot(x-2021+y-1)=13.$$

Так как 13 – простое число, то

1) $\begin{cases} x-2021-y+1=1,\\ x-2021+y-1=13;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2028,\\ y=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2021-y+1=-1,\\ x-2021+y-1=-13;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2014,\\ y=-5;\end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2021-y+1=13,\\ x-2021+y-1=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2028,\\ y=-5;\end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2021-y+1=-13,\\ x-2021+y-1=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2014,\\ y=7;\end{cases}$

3. Дядя Ваня отправился на рынок, чтобы купить в свой сад новые деревья (саженцы) – вишни и яблони. В результате он купил яблони по цене 510 рублей за штуку, а вишни – по 990 рублей за штуку. Всего он истратил 25200 рублей, из которых переплата (целое число рублей) составила от 160 до 200 рублей из-за отсутствия сдачи у некоторых продавцов. Сколько вишен и яблонь купил дядя Ваня на рынке?

(7 баллов)

Ответ: 16 вишен и 18 яблонь.

Решение:

Пусть x – количество яблонь, y – количество вишен, z – сумма переплаты.

$$\begin{cases} 510x+990y+z=25200,\\ 160\le z\le 200;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17x+33y+\dfrac{z}{30}=840,\\ 160\le z\le 200;\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 17x+33y=834,\\ z=180;\end{cases} \Longrightarrow$$

$x=50-2y+\frac{y-16}{17}$ – целое $\Rightarrow$ $y=16,\ 33,\dots$ Но так как $x\ge 0$, тогда $y=16$

$$\Rightarrow\ x=50-2\cdot 16+0=18.$$

4. Докажите, что для любых чисел a, b, c, причем $a>b>c$, выполняется неравенство

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b.$$

(7 баллов)

Решение:

$a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b = ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b) =$

$(a-b)(ab - ac - bc + c^2) = (a-b)(b-c)(a-c) > 0.$

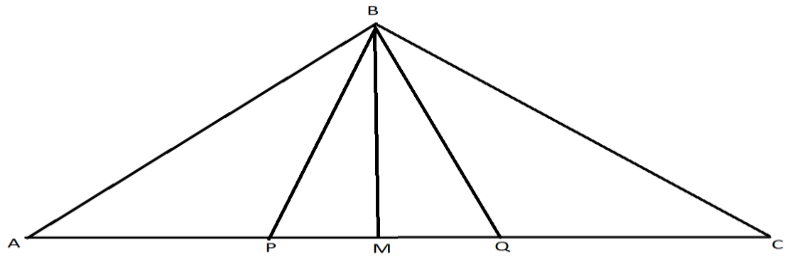
5. В треугольнике ABC на стороне AC поставлены две точки P и Q, причем $AP < AQ$. Относительно отрезков AB, BC, CQ, QP, PA, BP и BQ известно, что некоторые 4 из этих отрезков имеют равные длины. Возможно ли, чтобы 3 остальные отрезки имели равные длины? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Предположим, что это возможно, тогда пусть 4 отрезка имеют длину x, а остальные y. Тогда из четырех отрезков AB, BP, BQ, BC только два могут иметь длину x и только два длину y, так как окружность радиуса x или y с центром в B может пересечь прямую AC не более чем в двух точках. Следовательно, $AB=BC$, $PB=PQ$.



Равнобедренные треугольники ABC и PBQ имеют общую медиану BM, значит $AP=CQ=x$. Таким образом, возможны 2 варианта:

1) $PB=BQ=PQ=y$;
2) $PQ=AB=BC=y$.

Первый случай невозможен, так как углы APB и ABP были бы равны по 120 градусов каждый; второй тоже невозможен, так как треугольники APB и PBQ должны быть равными, но $\angle PBQ < \angle APB$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

МАТЕМАТИКА (8 класс)
Заключительный этап (2020–2021)
Вариант 2

1. Вычислите $\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a^4-b^4)(a-b)}{a^2-b^2}$ при $a=-1,\underbrace{8\ldots88}_{2021},\ b=2,\underbrace{1\ldots11}_{2020}2.$

(7 баллов)

Ответ: 64.

Решение:

$\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2}-\frac{(a^4-b^4)(a-b)}{a^2-b^2}=2ab(a-b)-(a^2+b^2)(a-b)=-(a-b)^3=-(-4)^3=64.$

2. Решите в целых числах уравнение

$$(y-2020)^2-x^2+2x-14=0.$$

(7 баллов)

Ответ: (7;2027), (–5;2013), (–5;2027), (7;2013).

Решение:
$$(y-2020)^2-(x-1)^2=13,$$
$$(y-2020-x+1)\cdot(y-2020+x-1)=13.$$

Так как 13 – простое число, то

1) $\begin{cases} y-2020-x+1=1, \\ y-2020+x-1=13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2027, \\ x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-2020-x+1=-1, \\ y-2020+x-1=-13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2013, \\ x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-2020-x+1=13, \\ y-2020+x-1=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2027, \\ x=-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-2020-x+1=-13, \\ y-2020+x-1=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2013, \\ x=7; \end{cases}$

3. Автошкола «Вираж» закупила автомобили по цене 531000 рублей за одну машину и электровелосипеды по цене 135000 рублей за один электровелосипед. Всего на покупку было потрачено 14327950 рублей, из них не более 15000 рублей (целое число рублей) – на мелкие сопутствующие товары. Сколько автомобилей и электровелосипедов закупила автошкола?

(7 баллов)

Ответ: 14 автомобилей и 51 электровелосипедов.

Решение:

Пусть x – количество автомобилей, y – количество электровелосипедов,

z – сумма переплаты.

$$\begin{cases} 531000x+135000y+z=14327950, \\ 0\le z\le 15000; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10620x+2700y+\frac{z}{50}=286559, \\ 0\le z\le 15000; \end{cases}$$

Решением данной системы являются числа $x=14, y=51, z=8950$ (в работе должно быть полное решение).

4. Докажите, что для любых чисел a, b, c, причем $a > b > c$, выполняется неравенство

$$a^2b - a^2c - c^2b > b^2a - b^2c - c^2a.$$

(7 баллов)

Решение:

$$a^2b - a^2c - c^2b - (b^2a - b^2c - c^2a) = a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b$$
$$= ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b) = (a-b)(ab - ac - bc + c^2) =$$
$$= (a-b)(b-c)(a-c) > 0.$$

5. В треугольнике MNK на стороне MK поставлены две точки P и Q, причем $MP < MQ$. Относительно отрезков MN, NK, KQ, QP, PM, NP и NQ известно, что некоторые 4 из этих отрезков имеют равные длины. Возможно ли, чтобы 3 остальные отрезки имели равные длины? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:
Решение аналогичной задачи подробно разобрано в варианте 1.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.