

МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап (2020-2021)
Вариант 1

1. Существует ли такое число x , что все три числа

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2021}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2 + 2021} - \frac{1}{x}$$

являются целыми?

(7 баллов)

Ответ: не существует.

Решение:

Допустим, что существует такое x , что все три числа являются целыми. Отметим, что первое число и третье число отличаются только знаком, поэтому достаточно, например, рассмотреть первое число и второе число. Итак, допустим, что существует такое x , что первые два числа являются целыми, тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2021} = m, & m \in \mathbb{Z}; \\ x - \frac{1}{x} = n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда из второго уравнения получим $x^2 = 1 + nx$ и затем подставим в первое $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+nx+2021} = m \Rightarrow (n-1-mn^2-2022)x = mn-2022 \Rightarrow x \in \mathbb{Q} : x = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} \tilde{m} \in \mathbb{Z}, \tilde{n} \in \mathbb{Z}$, (в виде несократимой дроби). Но тогда $x - \frac{1}{x} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} - \frac{\tilde{n}}{\tilde{m}} \notin \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение

$$\sin x + \sin^3 x + 2020 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2020 \cdot \cos^5(2x).$$

(7 баллов)

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Введем функцию $f(t) = t + t^3 + 2020t^5$. Функция является возрастающей, как сумма трех возрастающих функций. Следовательно, уравнение $f(a) = f(b)$ равносильно уравнению $a = b$. В нашем случае, имеем:

$$f(\sin x) = f(\cos(2x)),$$

$$\sin x = \cos(2x),$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = 0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Пусть $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, $n > 1$, n – целое число. Возможно ли представить $f(x)$ в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Допустим, что это возможно, то есть $f(x)$ можно представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами:

$$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3 = (x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_0) \cdot (x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0),$$

где все коэффициенты целые числа, а $k + m = n$.

Так как $a_0b_0 = 3$, то один из сомножителей по абсолютной величине равен 3, а другой 1. Пусть для определенности $|a_0| = 3, |b_0| = 1$.

Заметим, что рациональные корни многочлена $x^n + 5x^{n-1} + 3$ являются целыми числами и делителями числа 3. Поэтому легко проверить, что этот многочлен не имеет рациональных корней и $1 < k < n - 1$. Сравнивая коэффициенты, имеем

$$\begin{cases} a_0b_0 = 3, \\ a_1b_0 + a_0b_1 = 0, \\ a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0, \\ \dots \\ a_{k-1}b_0 + a_{k-2}b_1 + \dots = 0, \\ b_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \dots = 0. \end{cases}$$

Из первых k равенств следует, что все числа $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ делятся на 3. Тогда из последнего равенства следует, что b_0 тоже делится на 3, но $|b_0| = 1$, следовательно, пришли к противоречию.

4. Найдите все значения $a > 0$, при которых существуют положительные решения x неравенства

$$\frac{x^3}{a + \sqrt[3]{2020^4} \cdot x} + \frac{\sqrt[3]{2020^4} \cdot x}{a + x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{x \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2020^4})}.$$

(7 баллов)

Ответ : $a = 2020^2 = 4080400$.

Решение:

Введем обозначение $b = x^3$, $c = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x$. Тогда исходное неравенство переписывается в виде

$$\frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{b + c},$$

$$\frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} + \frac{a}{b + c} \leq \frac{3}{2}.$$

Но для $\forall a, b, c > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2},$$

причем равенство достигается при $a = b = c$ (это неравенство должно быть доказано в работе).

Следовательно, в нашем случае получаем равенство

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = \frac{3}{2} \text{ при } a = b = c.$$

Тогда $a = x^3 = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x$. Решая это уравнение, получаем $x = \sqrt[3]{2020^2}$, тогда $a = x^3 = 2020^2 = 4080400$.

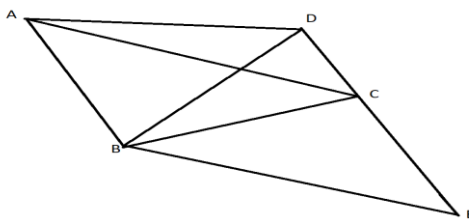
5. Известно, что площадь выпуклого четырехугольника равна 32, а сумма длин двух противоположных сторон и одной диагонали равна 16. Какие значения может принимать длина другой диагонали?

(7 баллов)

Ответ : единственное значение $8\sqrt{2}$.

Решение:

Пусть $AB = a, BD = b, CD = c$.



Так как $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$, то $32 \leq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc$. (1)

С другой стороны, $a + b + c = 16$, и тогда

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b(16 - b) = 32 - \frac{1}{2}(8 - b)^2 \leq 32 \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc = 32$. $\Rightarrow \angle ABD = \angle BDC = 90^\circ$.

Так как $32 - \frac{1}{2}(8 - b)^2 = 32$, то $b = 8$.

Длина диагонали AC не зависит от соотношения длин сторон AB и CD .

Действительно, отложим на прямой CD отрезок CE равный отрезку AB . Тогда $ABEC$ – параллелограмм и $BE = AC$, но $DE = a + c = 16 - b = 8$. Так как и $BD = 8$, то $BE = 8\sqrt{2}$, а следовательно, $AC = 8\sqrt{2}$ – единственное значение.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные

Ответы и Решения, 11 класс, Заключительный этап 2020-2021.

	(частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

МАТЕМАТИКА (11 класс)
Заключительный этап (2020-2021)
Вариант 2

1. Существует ли такое число x , что все три числа

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2020}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2 + 2020} - \frac{1}{x}$$

являются целыми?

(7 баллов)

Ответ: не существует.

Решение:

Допустим, что существует такое x , что все три числа являются целыми. Отметим, что первое число и третье число отличаются только знаком, поэтому достаточно, например, рассмотреть первое число и второе число. Итак, допустим, что существует такое x , что первые два числа являются целыми, тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2020} = m, & m \in \mathbb{Z}; \\ x - \frac{1}{x} = n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда из второго уравнения получим $x^2 = 1 + nx$ и затем подставим в первое $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+nx+2020} = m \Rightarrow (n-1-mn^2-2021)x = mn-2021 \Rightarrow x \in \mathbb{Q} : x = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} \tilde{m} \in \mathbb{Z}, \tilde{n} \in \mathbb{Z}$, (в виде несократимой дроби). Но тогда $x - \frac{1}{x} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} - \frac{\tilde{n}}{\tilde{m}} \notin \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение

$$\sin x + \sin^3 x + 2021 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2021 \cdot \cos^5(2x).$$

(7 баллов)

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Введем функцию $f(t) = t + t^3 + 2021t^5$. Функция является возрастающей, как сумма трех возрастающих функций. Следовательно, уравнение $f(a) = f(b)$ равносильно уравнению $a = b$. В нашем случае, имеем:

$$f(\sin x) = f(\cos(2x)),$$

$$\sin x = \cos(2x),$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = 0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. Пусть $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, n – целое число. Возможно ли представить $p(t)$ в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Допустим, что это возможно, то есть $p(t)$ можно представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами:

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3 = (t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_0) \cdot (t^m + b_{m-1}t^{m-1} + \dots + b_0)$,
где все коэффициенты целые числа, а $k + m = n$.

Так как $a_0b_0 = 3$, то один из сомножителей по абсолютной величине равен 3, а другой 1. Пусть для определенности $|a_0| = 3$, $|b_0| = 1$.

Заметим, что рациональные корни многочлена $x^n + 5x^{n-1} + 3$ являются целыми числами и делителями числа 3. Поэтому легко проверить, что этот многочлен не имеет рациональных корней и $1 < k < n - 1$. Сравнивая коэффициенты, имеем

$$\begin{cases} a_0b_0 = 3, \\ a_1b_0 + a_0b_1 = 0, \\ a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2 = 0, \\ \dots \\ a_{k-1}b_0 + a_{k-2}b_1 + \dots = 0, \\ b_0 + a_{k-1}b_1 + a_{k-2}b_2 + \dots = 0. \end{cases}$$

Из первых k равенств следует, что все числа $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ делятся на 3. Тогда из последнего равенства следует, что b_0 тоже делится на 3, но $|b_0| = 1$, следовательно, пришли к противоречию.

4. Найдите все значения $a > 0$, при которых существуют положительные решения x неравенства

$$\frac{x^3}{a + \sqrt[3]{2021^4} \cdot x} + \frac{\sqrt[3]{2021^4} \cdot x}{a + x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{x \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2021^4})}.$$

(7 баллов)

Ответ : $a = 2021^2 = 4084441$.

Решение:

Введем обозначение $b = x^3$, $c = \sqrt[3]{2021^4} \cdot x$. Тогда исходное неравенство переписывается в виде

$$\frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{b + c},$$

$$\frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} + \frac{a}{b + c} \leq \frac{3}{2}.$$

Но для $\forall a, b, c > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2},$$

причем равенство достигается при $a = b = c$ (это неравенство должно быть доказано в работе).

Следовательно, в нашем случае получаем равенство

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = \frac{3}{2} \text{ при } a = b = c.$$

Тогда $a = x^3 = \sqrt[3]{2021^4} \cdot x$. Решая это уравнение, получаем $x = \sqrt[3]{2021^2}$, тогда $a = x^3 = 2021^2 = 4084441$.

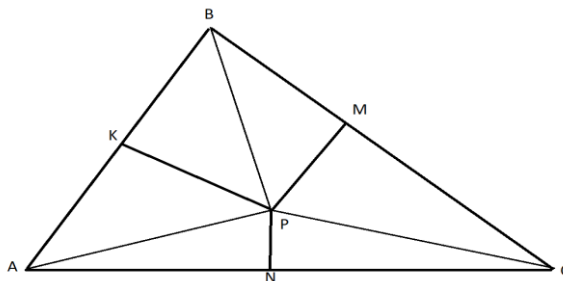
5. На плоскости рассматривается треугольник ABC , внутри которого выбрана точка P , а точки M, N, K являются ортогональными проекциями точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Найдите все точки P , для которых сумма $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ минимальна.

(7 баллов)

Ответ : P – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Решение:

Пусть $AB = a, AC = b, BC = c, PK = x, PN = y, PM = z$.



Тогда задача сводится к нахождению точки минимума функции

$$f(P) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z},$$

решить которую «в лоб» возможно, но достаточно сложно.

Используем другой известный прием.

Так как точка P – внутренняя точка треугольника, то площадь треугольника

$$S = S_{BPC} + S_{APC} + S_{APB} = ax + by + cz.$$

Так как S – постоянная, то найдем точку минимума функции $Sf(P)$:

$$Sf(P) = (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) = a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ac \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right).$$

Учитывая, что $t + \frac{1}{t} \geq 2$, а равенство достигается при $t = 1$, получим

$$Sf(P) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

$$Sf(P) \geq (a + b + c)^2,$$

$$f(P) \geq \frac{(a + b + c)^2}{S},$$

причем равенство достигается $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1$. Тогда $x = y = z$, следовательно, точка P – центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.