МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап (2020–2021)
Вариант 1

1. Существует ли такое число x, что все три числа

$$\sqrt{x^2+2021}-x, \qquad \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2021}, \quad 2x-\sqrt{x^2+2021}$$

являются целыми?

(7 баллов)

Ответ: не существует.

Решение:

Допустим, что существует такое x, что все три числа являются целыми.

Сложив первое число с третьим, получим $-3x$, следовательно x −целое.

Но если сложить первое и второе, то получим $\sqrt{x^2+2}-x$, которое тоже должно быть целым, как разность двух целых чисел. Учитывая, что x −целое, приходим к тому, что $\sqrt{x^2+2}$ должно быть целым, а это невозможно (в работе это должно быть показано любым способом – через остатки, четность(нечетность) и т.д.).

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xz+5yz-6xy=-2y, \\ 2xz+9yz-9xy=-12y, \\ yz-2xy=6y. \end{cases}$$

(7 баллов)

Ответ: $\boldsymbol{(-2;\ \tfrac{1}{6};\ 2), (a;0;0), (0;0;c), a,c\in R.}$

Решение:

Из третьего уравнения следует, что либо $y=0$, либо $z=2x+6$. Рассмотрим 2 возможных случая:

1) $y=0$. Тогда первое и второе уравнения сводятся к $xz=0$. Следовательно, решениями в этом случае будут всевозможные наборы вида – $(a;0;0)$, $(0;0;c)$, $a,c\in R$.
2) $z=2x+6$. Тогда умножим первое уравнение на 2 и вычтем из него второе, получим $yz-3xy=8y$, откуда $z=3x+8$. Учитывая, что $z=2x+6$, получим $x=-2$, $z=2$. Затем подставляем $x=-2$, $z=2$ в первое или второе уравнение и находим, что $y=\frac{1}{6}$.

3. Относительно квадратного трехчлена $f(x)$ известно, что $f(0)+f(1)=0$,

$f(2)+f(3)=0$. Чему равна сумма корней уравнения $f(x)=2021$ (при условии, что корни существуют)?

(7 баллов)

Ответ: 3.

Решение:

Выпишем квадратный трехчлен $f(x)$ в общем виде:

$$f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0.$$

Учитывая, что $f(0)+f(1)=0,\ f(2)+f(3)=0$, получим

$$\begin{cases} a+b+2c=0, \\ 13a+5b+2c=0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, получим $b=-3a$. Подставляя последнее равенство в первое уравнение, получим $c=a$. Следовательно, уравнение $f(x)=2021$ примет вид:

$$ax^2-3ax+a-2021=0.$$

Так как $a\neq 0,\ x^2-3x+\frac{a-2021}{a}=0$.

Следовательно, по теореме Виета сумма корней уравнения равна 3 (при условии, что корни существуют).

4. Докажите, что

$$\sqrt[2021]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2021]{2020\cdot 2018^{-1}}>2\,.$$

(7 баллов)

Решение:

Пусть $S=\sqrt[2021]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2021]{2020\cdot 2018^{-1}}$.

Тогда $S>\sqrt[2021]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2021]{2020\cdot 2019^{-1}}=a+\frac{1}{a}$.

Так как $a+\frac{1}{a}\geq 2$ для $\forall a>0$ (в работе это должно быть доказано любым способом - неравенством о средних, ФСУ, методом интервалов, графиком и т.д.), то $S>2$.

5. В прямоугольном треугольнике с катетами $a,\ b$ и гипотенузой c проведена высота h к гипотенузе. Возможно ли, чтобы сумма $c+h$ была меньше суммы $a+b$? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Допустим, что это возможно, а именно $c+h<a+b$.

Вычисляя площадь прямоугольного треугольника двумя способами $S=\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$, получаем, что $h=\frac{ab}{c}$. Подставляя последнее равенство в неравенство, имеем

$$c + \frac{ab}{c} < a + b, \Rightarrow \; c^2 + ab < ac + bc, \; \Rightarrow \; (c-a)(c-b) < 0.$$

Приходим к противоречию, так как длина гипотезы больше длины каждого катета.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап (2020–2021)
Вариант 2

1. Существует ли такое число x, что все три числа

$$\sqrt{x^2+2020}-x, \qquad \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}, \quad 2x-\sqrt{x^2+2020}$$

являются целыми?

(7 баллов)

Ответ: не существует.

Решение:

Допустим, что существует такое x, что все три числа являются целыми.

Сложив первое число с третьим, получим $-3x$, следовательно x −целое.

Но если сложить первое и второе, то получим $\sqrt{x^2+2}-x$, которое тоже должно быть целым, как разность двух целых чисел. Учитывая, что x −целое, приходим к тому, что $\sqrt{x^2+2}$ должно быть целым, а это невозможно (в работе это должно быть показано любым способом – через остатки, четность (нечетность) и т.д.).

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5xy+yz+2xz=-x, \\ 14xy+3yz+5xz=-4x, \\ 2xy+xz=4x. \end{cases}$$

(7 баллов)

Ответ: $\left(\frac{1}{2};3;-2\right)$**,** $(0;a;0)$**,** $(0;0;c)$**,** $a,c\in R$**.**

Решение:

Из третьего уравнения следует, что либо $x=0$, либо $z=4-2y$. Рассмотрим 2 возможных случая:

1) $x=0$. Тогда первое и второе уравнения сводятся к $yz=0$. Следовательно, решениями в этом случае будут всевозможные наборы вида − $(0;a;0)$, $(0;0;c)$, $a,c\in R$.
2) $z=4-2y$. Тогда умножим первое уравнение на 3, вычтем из него второе, получим $xy+xz=x$, откуда $z=1-y$. Учитывая, что $z=4-2y$, получим $z=-2$, $y=3$. Затем подставляем $z=-2$, $y=3$ в первое или второе уравнение и находим, что $x=\frac{1}{2}$.

3. Относительно квадратного трехчлена $f(x)$ известно, что $f(0)+f(1)=0$, $f(2)+f(3)=0$. Чему равна сумма корней уравнения $f(x)=2020$ (при условии, что корни существуют)?

(7 баллов)

Ответ: 3.

Решение:

Выпишем квадратный трехчлен $f(x)$ в общем виде:

$$f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0.$$

Учитывая, что $f(0)+f(1)=0,\ f(2)+f(3)=0$, получим

$$\begin{cases} a+b+2c=0, \\ 13a+5b+2c=0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, получим $b=-3a$. Подставляя последнее равенство в первое уравнение, получим $c=a$. Следовательно, уравнение $f(x)=2020$ примет вид:

$$ax^2-3ax+a-2020=0.$$

Так как $a\neq 0,\ x^2-3x+\frac{a-2020}{a}=0.$

Следовательно, по теореме Виета сумма корней уравнения равна 3 (при условии, что корни существуют).

4. Докажите, что $\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}>2.$

(7 баллов)

Решение: Пусть $S=\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}$.

Тогда $S>\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2020^{-1}}=a+\frac{1}{a}$.

Так как $a+\frac{1}{a}\geq 2$ для $\forall a>0$ (в работе это должно быть доказано любым способом - неравенством о средних, ФСУ, методом интервалов, графиком и т.д.), то $S>2$.

5. В прямоугольном треугольнике с катетами и гипотенузой, длины которых равны $m,$ $n,$ k соответственно, проведена высота к гипотенузе длиной равной h. Возможно ли, чтобы сумма $k+h$ была меньше суммы $m+n$? Ответ объясните.

(7 баллов)

Ответ: невозможно.

Решение:

Допустим, что это возможно, а именно $k+h<m+n$.

Вычисляя площадь прямоугольного треугольника двумя способами $S=\frac{mn}{2}=\frac{kh}{2}$,

получаем, что $h=\frac{mn}{k}$. Подставляя последнее равенство в неравенство, имеем

$$k+\frac{mn}{k}<m+n,\Rightarrow\ k^2+mn<mk+nk,\ \Rightarrow\ (k-m)(k-n)<0.$$

Приходим к противоречию, так как длина гипотезы больше длины каждого катета.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.