

**Министерство науки и высшего образования РФ**  
**Совет ректоров вузов Томской области**  
**Открытая региональная межвузовская олимпиада 2019-2020**  
**МАТЕМАТИКА (10 класс)**  
**Заключительный этап**  
**Вариант 1**

1. Найдите все  $x$ , для которых  $2[x] + \{3x\} = \frac{7}{3}$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ ,  $\{x\}$  – дробная часть числа  $x$ , то есть  $\{x\} = x - [x]$ .

(7 баллов)
2. Два учителя математики принимают зачет по геометрии, проверяя умение решать задачи и знание теории у каждого из учеников 10 класса. У первого учителя на 1 ученика уходит соответственно 5 и 7 минут, а у второго учителя на 1 ученика – 3 и 4 минуты. За какое наименьшее время они сумеют опросить 25 учеников?

(7 баллов)
3. Относительно квадратного трехчлена  $f(x)$  известно, что он имеет два различных корня и удовлетворяет условию  $f(x^2 + y^2) \geq f(2xy)$  для любых  $x$  и  $y$ . Возможно ли, чтобы хотя бы один из корней  $f(x)$  является отрицательным?

(7 баллов)
4. Докажите, что для  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  выполняется неравенство
$$(a + b)(ab + 2025) \geq 180ab.$$

(7 баллов)
5. Ученик построил четырехугольник  $MNKL$  и измерил расстояния от вершин до точки  $P$ , которую указал учитель. Оказалось, что  $MP^2 + NP^2 + KP^2 + LP^2 = 2S$ , где  $S$  – площадь четырехугольника. Что за четырехугольник построил ученик, и что за точку указал учитель?

(7 баллов)

**Внимание!** Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

**Желаем успеха!**

**МАТЕМАТИКА (10 класс)**

**Заключительный этап**

**Вариант 2**

6. Найдите все  $x$ , для которых  $x^2 - 10[x] + 9 = 0$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .  
(7 баллов)
7. Два учителя математики принимают зачет по геометрии, проверяя умение решать задачи и знание теории у каждого из учеников одной параллели 10 класса. У первого учителя на 1 ученика уходит соответственно 5 и 7 минут, а у второго учителя на 1 ученика – 3 и 4 минуты. За какое наименьшее время они сумеют опросить 25 учеников?  
(7 баллов)
8. Относительно квадратных трехчленов  $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1$ ,  $f_2(x) = ax^2 + bx + c_2$ , ...,  $f_{2020}(x) = ax^2 + bx + c_{2020}$  известно, что каждый из них имеет по два корня. Обозначим через  $x_i$  один из корней  $f_i(x)$ , где  $i = 1, 2, \dots, 2020$ . Найдите значение  $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{2020}(x_{2019}) + f_1(x_{2020})$ .  
(8 баллов)
9. Докажите, что для  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  выполняется неравенство  $(a + b)(ab + 505^2) \geq 2020ab$ .  
(8 баллов)
10. Ученик построил четырехугольник  $MNKL$  и измерил расстояния от вершин до точки  $Q$ , которую указал учитель. Оказалось, что  $MQ^2 + NQ^2 + KQ^2 + LQ^2 = 2S$ , где  $S$  – площадь четырехугольника. Что за четырехугольник построил ученик, и что за точку указал учитель?  
(7 баллов)

**Внимание!** Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

**Желаем успеха!**