**МАТЕМАТИКА (9 класс)**
**Заключительный этап**
**Вариант 1**

**1.** Найдите все $x$, для которых $[x]+\{2x\}=2{,}5$ , где $[x]$– целая часть числа $x$, $\{x\}$– дробная часть числа $x$, то есть $\{x\}=x-[x]$.

**Ответ:** $\{\mathbf{2{,}25};\ \mathbf{2{,}75}\}$.
**Решение:**

Из уравнения и определений следует, что $[x]=2$, а $\{2x\}=0{,}5$.
Рассмотрим уравнение $\{2x\}=0{,}5$:
1) если $0\le\{x\}<\frac{1}{2}$, то $\{2x\}=2\{x\}\ \Rightarrow\ \{x\}=0{,}25$.
2) если $\frac{1}{2}\le\{x\}<1$, то $\{2x\}=2\{x\}-1\ \Rightarrow\ \{x\}=0{,}75$.
Так как $x=[x]+\{x\}$, то решения исходного уравнения
$$x_1=2+0{,}25=2{,}25,\quad x_2=2+0{,}75=2{,}75.$$

**2.** Обычно Никита выходит из дома в 8:00 утра, садится в машину дяди Вани, который довозит его на учебу к определенному времени. Но в пятницу Никита вышел из дома в 7:10 и побежал в противоположном направлении. Дядя Ваня обождал его и в 8:10 поехал за ним, догнав Никиту, развернулся и доставил его на учебу с опозданием на 20 мин. Во сколько раз скорость машины дяди Вани превышала скорость бегущего Никиты?

**Ответ: в 13 раз.**
**Решение:**

Машина находилась в пути на 10 мин больше обычного за счет того, что 5 минут догоняла Никиту и 5 минут возвращалась до дома. Машина в 8:15 догнала Никиту и за 65 минут (с 7:10 по 8:15) он пробежал столько, сколько машина ехала 5 минут, т. е. потратил в 65 : 5 = 13 раз больше времени.

**3.** Относительно квадратного трехчлена $g(x)=mx^2+nx+k$ известно, что значения $g(k)$ и $g\left(\frac{1}{m}\right)$ имеют разные знаки. Могут ли корни многочлена $g(x)$ иметь одинаковые знаки?

**Ответ: нет.**
**Решение:**

По условию $g(k)\cdot g\left(\frac{1}{m}\right)<0$, с другой стороны, имеем
$$g(k)\cdot g\left(\frac{1}{m}\right)=(mk^2+nk+k)\left(m\frac{1}{m^2}+n\frac{1}{m}m+k\right)=\frac{k}{m}(mk+n+1)^{\,2}.$$
Следовательно, $\frac{k}{m}<0$, а по теореме Виета $\frac{k}{m}$ равно произведению корней многочлена $g(x)$. $\Rightarrow$ корни многочлена $g(x)$ не могут иметь одинаковые знаки.

**4.** Докажите, что для неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$ выполняется неравенство

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

**Доказательство:**

Пусть $ab = x^2$, $bc = y^2, ac = z^2$, откуда для неотрицательных чисел $a$, $b$, $c$ $\sqrt{ab} = x, \sqrt{bc} = y, \sqrt{ac} = z$. Тогда для неотрицательных чисел $x$, $y$, $z$ исходное неравенство перепишется в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xz + xy + yz. \qquad (*)$$

Так как $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$, $\frac{x^2+z^2}{2} \geq xz$, $\frac{y^2+z^2}{2} \geq yz$, то складывая эти три неравенства, получим верное неравенство $(*)$.

**5.** В равнобедренной трапеции $MNKL$ с основаниями $ML$, $NK$ диагонали перпендикулярны сторонам $MN$, $KL$ и пересекаются под углом $22{,}5°$. Найдите высоту трапеции, если длина $NQ$=3, где $Q-$середина большего основания.

**Ответ:** $\mathbf{\frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ $(\mathbf{3\sin 22{,}5°})$.

**Решение:**

Пусть $ML-$ большее основание трапеции $MNKL$.

Рассмотрим треугольник $MNL$: $\angle MNL = 90°$, $Q-$середина $ML$ (по условию) $\Rightarrow$ $Q-$середина гипотенузы $ML \Rightarrow NQ= MQ=QL \Rightarrow ML=6$, так как $NQ$=3 (по условию).

Пусть точка $O-$ точка пересечения диагоналей, точка $H$ − основание перпендикуляра, опущенного из $K$ на основание $ML$, тогда $KH-$искомая высота.

Рассмотрим треугольник $MOL$: $\angle KOL = 22{,}5°$ − внешний угол в равнобедренном треугольнике $MOL \Rightarrow \angle OML = \angle OLM = 11{,}25°$.

Рассмотрим треугольник $MKL$: $\angle MKL = 90°$, $MK= ML\cdot \cos 11{,}25°$.

Рассмотрим треугольник $MKH$: $\angle MHK = 90°$, тогда искомая высота

$$KH= MK \cdot \sin 11{,}25° = ML\cos 11{,}25° \sin 11{,}25° = 3\sin 22{,}5° = 3\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

## Вариант 2

**1.** Найдите все $x$, для которых $\left[\frac{8x+19}{7}\right] = \frac{16(x+1)}{11}$, где $[t]-$ целая часть числа $t$.

**Ответ:** $\left\{\mathbf{1\frac{1}{16}; 1\frac{3}{4}; 2\frac{7}{16}; 3\frac{1}{8}; 3\frac{13}{16}}\right\}$.

**Решение:**

Пусть $t = \frac{16(x+1)}{11}$, где $t \in Z$ и выразим $x = \frac{11t-16}{16}$. Тогда уравнение примет вид: $\left[\frac{8\frac{11t-16}{16}+19}{7}\right] = t$ или $\left[\frac{11t+22}{14}\right] = t$. Следовательно, $0 \leq \frac{11t+22}{14} - t < 1$ или

$$\begin{cases} \dfrac{11t+22}{14} - t < 1, \\ \dfrac{11t+22}{14} - t \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > \dfrac{8}{3}, \\ t \leq \dfrac{22}{3}, \end{cases} \overset{t\in Z}{\Longrightarrow} t_1 = 3,\ t_2 = 4,\ t_3 = 5,\ t_4 = 6,\ t_5 = 7.$$

Учитывая, что $x = \frac{11t-16}{16}$, получим $x_1 = 1\frac{1}{16}$, $x_2 = 1\frac{3}{4}$, $x_3 = 2\frac{7}{16}$, $x_4 = 3\frac{1}{8}, x_5 = 3\frac{13}{16}$.

**2.** Обычно Дима выходит из дома в 8:10 утра, садится в машину дяди Вани, который довозит его на учебу к определенному времени. Но в четверг Дима вышел из дома в 7:20 и побежал в противоположном направлении. Дядя Ваня обождал его и в 8:20 поехал за ним, догнав Диму, развернулся и доставил его на учебу с опозданием на 26 мин. Во сколько раз скорость машины дяди Вани превышала скорость бегущего Димы?

**Ответ: в 8,5 раз.**

**Решение:**

Машина находилась в пути на 16 мин больше обычного за счет того, что 8 минут догоняла Диму и 8 минут возвращалась до дома. Машина в 8:28 догнала Диму и за 68 минут (с 7:20 по 8:28) он пробежал столько, сколько машина ехала 8 минут, т.е. потратил в $68 : 8 = 8{,}5$ раз больше времени.

**3.** Относительно квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ известно, что

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0.$$

Найдите значение произведения $f(-1) \cdot f(1)$.

**Ответ: 0.**

**Решение:**

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = \frac{a(a-b-c)^2}{4a^2} + \frac{b(a-b-c)}{2a} + c = \frac{(a-b+c)(a+b+c)}{4a} = \frac{f(-1)\cdot f(1)}{4a} = 0.$$

**4.** Докажите, что для положительных чисел $a, b, c$, удовлетворяющих условию $a + b + c = 3$, выполняется неравенство

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac.$$

**Доказательство:**

Так как $a + b + c = 3$, то $(a + b + c)^2 = 9$. Тогда $2(ab + bc + ca) = 9 - a^2 - b^2 - c^2$. Следовательно, нужно доказать что

$$2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 9.$$

Используя неравенство о средних, получим

$$2\sqrt{a} + a^2 = \sqrt{a} + \sqrt{a} + a^2 \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot a^2} = 3\sqrt[3]{a^3} = 3a.$$

Следовательно,

$$2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(a + b + c) = 9.$$

**5.** В равнобедренной трапеции $MNKL$ с основаниями $ML$, $NK$ диагонали перпендикулярны сторонам $MN$, $KL$ и пересекаются под углом $15°$. Найдите высоту трапеции, если длина $NQ=5$, где $Q-$середина большего основания.

**Ответ:** $\frac{5\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $(\mathbf{5\sin 15°})$.

**Решение:**

Пусть $ML-$ большее основание трапеции $MNKL$.

Рассмотрим треугольник $MNL$: $\angle MNL = 90°$, $Q-$середина $ML$ (по условию) $\Rightarrow$ $Q-$середина гипотенузы $ML \Rightarrow NQ= MQ=QL \Rightarrow ML=10$, так как $NQ=5$ (по условию).

Пусть точка $O-$ точка пересечения диагоналей, точка $H$ − основание перпендикуляра, опущенного из $K$ на основание $ML$, тогда $KH-$искомая высота.

Рассмотрим треугольник $MOL$: $\angle KOL = 15°$ − внешний угол в равнобедренном треугольнике $MOL \Rightarrow \angle OML = \angle OLM = 7{,}5°$.

Рассмотрим треугольник $MKL$: $\angle MKL = 90°$, $MK= ML\cdot \cos 7{,}5°$.

Рассмотрим треугольник $MKH$: $\angle MHK = 90°$, тогда искомая высота

$$KH= MK \cdot \sin 7{,}5° = ML \cos 7{,}5° \sin 7{,}5° = 5\sin 15° = 5\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \frac{5\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

| Баллы | Критерии оценивания |
|---|---|
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении. |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |