МАТЕМАТИКА (8 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найдите все решения уравнения $(x-|x|)^2+x+|x|=2020$.

Ответ: $\{\mathbf{1010};\ -\sqrt{\mathbf{505}}\}$.

Решение:

1) Пусть $x \geq 0$, тогда $(x-x)^2+x+x=2020$, получаем $x=1010$.

2) Пусть $x<0$, тогда $(x+x)^2+x-x=2020$, получаем $4x^2=2020$, $x=\pm\sqrt{505}$, но так как $x<0$, то $x=-\sqrt{505}$.

2. Известно, что двузначное число при делении на 4 дает в остатке 3, а при делении на 3 дает в остатке 2. Найдите все такие числа.

Ответ: $\{\mathbf{11};\mathbf{23};\mathbf{35};\mathbf{47};\mathbf{59};\mathbf{71};\mathbf{83};\mathbf{95}\}$.

Решение:

Обозначим искомое число за A, тогда имеем $A=4m+3=3n+2$, откуда получаем линейное диофантово уравнение $3n-4m=1$. Легко подбирая частное решение $m=n=-1$, получаем общее решение в виде

$$\begin{cases} m=-1+3t, \\ n=-1+4t, \end{cases} t \in Z. \quad \Rightarrow \quad A=12t-1, t \in Z.$$

Учитывая, что A-двузначное число, получим $t=\overline{1,8}$. Перебирая $t=\overline{1,8}$, получим все искомые числа $\{11;23;35;47;59;71;83;95\}$.

3. Коэффициенты квадратных трехчленов $f(x)=x^2+bx+c$ и $g(x)=x^2+ax+d$ удовлетворяют условию $0<a<b<c<d$. Возможно ли, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ имели общий корень?

Ответ: нет.

Решение: (методом от противного)

Предположим, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень x_0 . Так как все коэффициенты многочленов положительны, то все корни (если они есть) отрицательны.$\Rightarrow$ $x_0<0$. Общий корень x_0 удовлетворяет условию $x_0\,(b-a)=d-c$. Учитывая условие, что $0<a<b<c<d$, получим, что $b-a>0$, $d-c>0$, откуда следует, что $x_0>0$. Получили противоречие.

4. Докажите, что для любых чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab-bc+ca.$$

Доказательство:

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab-2bc+2ca,$$

$$a^2-2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+a^2-2ac+c^2 \geq 0,$$

$$(a-b)^2+(b+c)^2+(a-c)^2 \geq 0,$$

получили верное неравенство для $\forall a,b,c$.

5. Внутренняя точка *P* остроугольного треугольника *ABC* удовлетворяет условию

$$AB^2+PC^2=BC^2+AP^2=AC^2+BP^2.$$

Чем является точка *P* для треугольника *ABC*?

Ответ: точкой пересечения высот треугольника *ABC*.

Решение:

Проведем перпендикуляр PH к стороне *AC* и высоту *BK*.

По теореме Пифагора $AB^2-AK^2=BC^2-CK^2$ или $AB^2-BC^2=AK^2-CK^2$. Но по условию $AB^2-BC^2=AP^2-PC^2$. С другой стороны имеем, что $AP^2-AH^2=PC^2-HC^2$ или $AP^2-PC^2=AH^2-HC^2$.Тогда $AB^2-BC^2=AK^2-CK^2=AP^2-PC^2=AH^2-HC^2$. $\Rightarrow AK^2-CK^2=AH^2-HC^2 \Rightarrow$ точки H и K совпадают $\Rightarrow$ точка *P* лежит на высоте *BK*.

Аналогично доказывается, что точка *P* лежит на двух других высотах треугольника *ABC*, откуда следует, что точка *P* является точкой пересечения высот треугольника *ABC*.

Вариант 2

1. Найдите все решения уравнения $(x-|x|)^2+2020(x+|x|)=2020$.

Ответ: $\{\mathbf{0,5};\ -\sqrt{\mathbf{505}}\}$.

Решение:

1) Пусть $x \geq 0$, тогда $(x-x)^2+2020(x+x)=2020$, получаем $x=0{,}5$.

2) Пусть $x<0$, тогда $(x+x)^2+2020(x-x)=2020$, получаем $4x^2=2020$, $x=\pm\sqrt{505}$, но так как $x<0$, то $x=-\sqrt{505}$.

2. Известно, что двузначное число при делении на 3 дает в остатке 1, а при делении на 5 дает в остатке 3. Найдите все такие числа.

Ответ: $\{\mathbf{13};\mathbf{23};\mathbf{43};\mathbf{58};\mathbf{73};\mathbf{88}\}$.

Решение:

Обозначим искомое число за A, тогда имеем $A=3m+1=5n+3$, откуда получаем линейное диофантово уравнение $3m-5n=2$. Легко подбирая частное решение $m=n=-1$, получаем общее решение в виде

$$\begin{cases} m = -1 + 5t, \\ n = -1 + 3t, \end{cases} t \in Z. \quad \Rightarrow \quad A = 15t - 2, t \in Z.$$

Учитывая, что A-двузначное число, получим $t = \overline{1,6}$. Перебирая $t = \overline{1,6}$, получим все искомые числа $\{13; 23; 43; 58; 73; 88\}$.

3. Коэффициенты квадратных трехчленов $f(x) = x^2 + mx + n$ и $p(x) = x^2 + kx + l$ удовлетворяют условию $k > m > n > l > 0$. Возможно ли, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ имели общий корень?

Ответ: нет.

Решение: (методом от противного)

Предположим, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень x_0 . Так как все коэффициенты многочленов положительны, то все корни (если они есть) отрицательны.⇒ $x_0 < 0$. Общий корень x_0 удовлетворяет условию $x_0\,(m - k) = l - n$. Учитывая условие, что $k > m > n > l > 0$, получим, что $m - k < 0$, $l - n < 0$, откуда следует, что $x_0 > 0$. Получили противоречие.

4. Докажите, что для любых чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - bc - ca.$$

Доказательство:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab - 2bc - 2ca,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + a^2 + 2ac + c^2 \geq 0,$$

$$(a - b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2 \geq 0,$$

получили верное неравенство для $\forall a, b, c$.

5. Внутренняя точка Q остроугольного треугольника MNK удовлетворяет условию

$$MN^2 + QK^2 = NK^2 + MQ^2 = MK^2 + NQ^2.$$

Чем является точка Q для треугольника MNK?

Ответ: точкой пересечения высот треугольника *MNK*.

Решение:

Проведем перпендикуляр QH к стороне MK и высоту BL.

По теореме Пифагора $MN^{\,2} - ML^2 = NK^2 - KL^2$ или $MN^2 - NK^2 = ML^2 - KL^2$. Но по условию $MN^2 - NK^2 = MQ^2 - QK^2$.

С другой стороны имеем, что $MQ^2 - MH^2 = QK^2 - HK^2$ или $MQ^2 - QK^2 = MH^2 - HK^2$.

Тогда $MN^2 - NK^2 = ML^2 - KL^2 = MQ^2 - QK^2 = MH^2 - HK^2 \Rightarrow ML^2 - KL^2 = MH^2 - HK^2$ $\Rightarrow$ точки H и L совпадают $\Rightarrow$ точка Q лежит на высоте BL.

Аналогично доказывается, что точка Q лежит на двух других высотах треугольника MNK, откуда следует, что точка Q является точкой пересечения высот треугольника MNK.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.