МАТЕМАТИКА (10 класс)
Заключительный этап
Вариант 1

1. Найдите все x, для которых $2[x]+\{3x\}=\frac{7}{3}$, где $[x]$– целая часть числа x, $\{x\}$– дробная часть числа x, то есть $\{x\}=x-[x]$.

Ответ: $\left\{\mathbf{1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}};\mathbf{1}\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}};\mathbf{1}\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}}\right\}$.

Решение:

Из уравнения и определений следует, что $[x]=1$, а $\{3x\}=\frac{1}{3}$.

Рассмотрим уравнение $\{3x\}=\frac{1}{3}$:

1) если $0\le\{x\}<\frac{1}{3}$, то $\{3x\}=3\{x\}\Rightarrow\{x\}=\frac{1}{9}$;

2) если $\frac{1}{3}\le\{x\}<1$, то $\left[\begin{array}{l}\{3x\}=3\{x\}-1\Rightarrow\{x\}=\frac{4}{9},\\ \{3x\}=3\{x\}-2\Rightarrow\{x\}=\frac{7}{9}.\end{array}\right.$

Так как $x=[x]+\{x\}$, то решения исходного уравнения

$$x_1=1+\frac{1}{9}=1\frac{1}{9},\ \ x_2=1+\frac{4}{9}=1\frac{4}{9},\ \ x_3=1+\frac{7}{9}=1\frac{7}{9}.$$

2. Два учителя математики принимают зачет по геометрии, проверяя умение решать задачи и знание теории у каждого из учеников 10 класса. У первого учителя на 1 ученика уходит соответственно 5 и 7 минут, а у второго учителя на 1 ученика − 3 и 4 минуты. За какое наименьшее время они сумеют опросить 25 учеников?

Ответ: 110 минут.

Решение: (оценка+пример)

Пусть первый учитель принял зачет по задачам у X учеников, а по теории у Y учеников. Тогда второй учитель принял зачет по задачам у (25-X) учеников, а по теории у (25-Y) учеников. Пусть T − минимальное время, за которое они сумеют опросить 25 учеников. Тогда, учитывая условие задачи, составим систему неравенств

$$\begin{cases}5X+7Y\le T,\\3(25-X)+4(25-Y)\le T.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5X+7Y\le T,\\-3X-4Y\le T-175.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}15X+21Y\le 3T,\\-15X-20Y\le 5T-875.\end{cases}$$

Откуда $0\le Y\le 8T-875\ \Rightarrow\ 8T\ge 875\ \Rightarrow T\ge 110$.

Значит, меньше, чем за 110 минут принять зачет у 25 учеников невозможно.

Приведем пример (достижимости границы) :

Первый учитель принимает у 22 учеников только задачи и тратит на это 110 минут; второй учитель у оставшихся троих принимает задачи и тратит на это 9 минут, и у всех 25 человек принимает теорию и тратит на это 100 минут, таким образом тратит 109 минут.

3. Относительно квадратного трехчлена $f(x)$ известно, что он имеет два различных корня и удовлетворяет условию $f(x^2+y^2)\ge f(2xy)$ для любых x и y. Возможно ли, чтобы хотя бы один из корней $f(x)$ является отрицательным?

Ответ: нет.

Решение: (метод от противного)

Предположим, что оба корня квадратного трехчлена $f(x)$ неотрицательны.

Возьмем $y=0$ и подставим в неравенство, следовательно, получим, что

$$f(x^2)\ge f(0)\ \text{ для любого } x.$$

Тогда $f(t)\ge f(0)$ для любого $t\ge 0$. Отметим, что из этого, в частности, следует, что ветви параболы направлены вверх. Так как абсцисса t_0 вершины параболы положительна, то с одной стороны для нее должно выполняться $f(t_0)\ge f(0)$, а с другой стороны $f(t_0)<f(0)$. Пришли к противоречию.

4. Докажите, что для $a \ge 0,\ \ b \ge 0$ выполняется неравенство

$$(a+b)(ab+2025) \ge 180ab.$$

Доказательство:

Разделим неравенство на 4, получим

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{ab+2025}{2} \ge 45ab.$$

Применим неравенство о средних к числам a и b, и к числам $ab+2025$:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{ab+2025}{2} \ge \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab2025} = 45ab.$$

5. Ученик построил четырехугольник *MNKL* и измерил расстояния от вершин до точки *P*, которую указал учитель. Оказалось, что $MP^2 + NP^2 + KP^2 + LP^2 = 2S$, где S – площадь четырехугольника. Что за четырехугольник построил ученик, и что за точку указал учитель?

Ответ: квадрат, точка P− точка пересечения диагоналей.

Решение:

Пусть *MP =a, NP= b, KP=c, LP=d,* длины диагоналей обозначим через d_1 и d_2 , через α − угол между диагоналями. Тогда $\mathrm{S} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha \le \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Используя неравенство о средних и условие задачи, получим

$$\mathrm{S} \le \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \le \frac{1}{2} \cdot \frac{{d_1}^2 + {d_2}^2}{2} \le \frac{1}{4}((a+c)^2 + (b+d)^2) \le \frac{1}{2}\ (a^2+b^2+c^2+d^2) = S.$$

Таким образом, все неравенства переходят в равенства, то есть *a= b=c=d,* $\sin\alpha = 1$. Следовательно, искомый четырехугольник квадрат, а точка P − точка пересечения диагоналей.

Вариант 2

1. Найдите все *x*, для которых $x^2 - 10[x] + 9 = 0$, где $[x]$− целая часть числа *x*.

Ответ: $\{\mathbf{1}; \sqrt{\mathbf{61}}; \sqrt{\mathbf{71}}; \mathbf{9}\}$.

Решение:

Оценим левую часть уравнения снизу:

$$x^2 - 10x + 9 \le x^2 - 10[x] + 9 = 0.$$

Следовательно, $1 \le x \le 9$. С другой стороны, $x^2 + 9 = 10[x]$, а значит $x^2 + 9$ − целое число и делится на 10. Перебирая значения $x^2 + 9$ от 10 до 90, находим все решения $\{1; \sqrt{61}; \sqrt{71}; 9\}$, удовлетворяющие исходному уравнению.

2. Два учителя математики принимают зачет по геометрии, проверяя умение решать задачи и знание теории у каждого из учеников 10 класса. У первого учителя на 1 ученика уходит соответственно 5 и 7 минут, а у второго учителя на 1 ученика − 3 и 4 минуты. За какое наименьшее время они сумеют опросить 25 учеников?

Ответ: 110 минут.

Решение: полностью соответствует решению задачи 2 варианта 1.

3. Относительно квадратных трехчленов $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1,\ f_2(x) = ax^2 + bx + c_2,\ \dots,\ f_{2020}(x) = ax^2 + bx + c_{2020}$ известно, что каждый из них имеет по два корня. Обозначим через x_i один из корней $f_i(x)$, где $i = 1,2,\dots,2020$. Найдите значение

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{2020}(x_{2019}) + f_1(x_{2020}).$$

Ответ: 0.

Решение:

Так как $f_1(x_1) = 0$, то $f_2(x_1) = f_1(x_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1$.
Аналогично можно получить следующие равенства:

$$f_3(x_2) = c_3 - c_2, \dots, f_{2020}(x_{2019}) = c_{2020} - c_{2019}, f_1(x_{2020}) = c_1 - c_{2020}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \cdots + f_{2020}(x_{2019}) + f_1(x_{2020}) = 0.$$

4. Докажите, что для $a \geq 0$, $b \geq 0$ выполняется неравенство

$$(a+b)(ab+505^2) \geq 2020ab.$$

Доказательство:

Разделим неравенство на 4, получим

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{ab+505^2}{2} \geq 505ab.$$

Применим неравенство о средних к числам a и b, и к числам $ab + 505^2$:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{ab+505^2}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab505^2} = 505ab.$$

5. Ученик построил четырехугольник $MNKL$ и измерил расстояния от вершин до точки Q, которую указал учитель. Оказалось, что $MQ^2 + NQ^2 + KQ^2 + LQ^2 = 2S$, где S – площадь четырехугольника. Что за четырехугольник построил ученик, и что за точку указал учитель?

Ответ: квадрат, точка $-$ Qточка пересечения диагоналей.

Решение:

Пусть $MQ = a$, $NQ = b$, $KQ = c$, $LQ = d$, длины диагоналей обозначим через d_1 и d_2, через $\alpha -$ угол между диагоналями. Тогда $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha \leq \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Используя неравенство о средних и условие задачи, получим

$$S \leq \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{{d_1}^2 + {d_2}^2}{2} \leq \frac{1}{4}((a+c)^2 + (b+d)^2) \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = S.$$

Таким образом, все неравенства переходят в равенства, то есть $a = b = c = d$, $\sin\alpha = 1$. Следовательно, искомый четырехугольник квадрат, а точка $Q -$ точка пересечения диагоналей.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.