

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ
ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019
МАТЕМАТИКА (8 КЛАСС)
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
1 ВАРИАНТ
(ОТВЕТЫ)

1. Вычислите:

$$\frac{2 \cdot 2019}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2019}}$$

(7 баллов)

Ответ: 2020.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 2019}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2019}} &= \frac{2 \cdot 2019}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{1010 \cdot 2019}} = \\ &= \frac{2019}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2019}} = \frac{2019}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020}} = \\ &= \frac{2019}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}} = \frac{2019}{1 - \frac{1}{2020}} = 2020. \end{aligned}$$

2. Найдите все пары чисел (a, b) , при которых функция

$$f(x) = \frac{(a + 5b)x + a + b}{ax + b}$$

постоянна во всей области ее определения.

(7 баллов)

Ответ: $a = \pm\sqrt{5}b$, $b \neq 0$.

Решение:

Отметим сначала, что при $a = b = 0$ функция $f(x)$ не определена ни для одного значения x . Если $a = 0$, $b \neq 0$, то получаем $f(x) = 5x + 1$ и $f(x)$ не является постоянной, значит, $a \neq 0$.

Пусть теперь при всех x из области определения $D(f)$ функции $f(x)$, то есть при всех $x \neq -\frac{b}{a}$ выполняется равенство $f(x)=k$. Тогда, учитывая представление $f(x)$, получим

$$(a + 5b)x + a + b = kax + kb, \text{ или } (a + 5b - ka)x + (a + b - kb) = 0 \text{ при всех } x \in D(f).$$

А это возможно тогда и только тогда, когда выполняются следующая система уравнений:

$$\begin{cases} a + 5b - ka = 0, \\ a + b - kb = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем $a = (k - 1)b$, и затем $(k^2 - 2k - 4)b = 0$. Если $b = 0$, то и $a = 0$, чего быть не может, как отмечалось выше, следовательно,

$$k^2 - 2k - 4 = 0, \quad k = 1 \pm \sqrt{5}, \quad a = (k - 1)b = \pm\sqrt{5}b, \quad \text{где } b \neq 0.$$

3. Решите в целых числах уравнение:

$$x^2 - xy - 2y^2 = 7. \quad (7 \text{ баллов})$$

Ответ: $\{(3; -2), (5; 2), (-3; 2), (-5; -2)\}$

Решение:

Разложим левую часть уравнения, например, с помощью группировки, на множители:

$$x^2 - xy - 2y^2 = x^2 - y^2 - xy - y^2 = (x + y)(x - y) - y(x + y) = (x + y)(x - 2y). \quad \text{Откуда}$$

получим следующий вид исходного уравнения:

$$(x + y)(x - 2y) = 7.$$

Учитывая, что x и y — целые числа, а число 7 — простое число, решение уравнения сводится к решению четырех систем:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 2y = 7, \end{cases} \begin{cases} x + y = 7, \\ x - 2y = 1, \end{cases} \begin{cases} x + y = -1, \\ x - 2y = -7, \end{cases} \begin{cases} x + y = -7, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

Решая эти системы уравнений, получаем четыре пары решений:

$$(3; -2), (5; 2), (-3; 2), (-5; -2).$$

Замечание: за каждое правильное решение, найденное подбором — 1балл.

4. Из городка «Ух» в городок «Ах» в 10⁰⁰ утра выехал Иван на своем велосипеде, проехав две трети пути, он миновал городок «Ох», из которого в этот момент времени в городок «Ух» отправился Петр пешком. В тот момент времени, когда Иван прибыл в городок «Ах», оттуда в обратном направлении выехал Николай на своем велосипеде и прибыл в городок «Ух» в 11⁰⁰ утра этого же дня. В скольких километрах от городка «Ах» Николай догнал Петра, если Петр прибыл в городок «Ух» в 12⁰⁰ утра того же дня, при этом скорость каждого участника движения была постоянной, а расстояние между городками «Ух» и «Ах» составляет всего 10 км. (7 баллов)

Ответ: 6 км.

Решение:

Решим задачу графически-геометрическим способом. Изобразим графики движения Ивана через отрезок KL , Николая через отрезок LM и Петра через отрезок NP в системе координат $(t; s)$, где t — время в часах, s — расстояние в километрах от пункта А (рис.1). Пусть Q — точка пересечения

LM и NP . По условию $MK = 2$ и $PM = 1$. Проведём $MG \parallel NQ$, $G \in KL$, тогда по теореме Фалеса имеем

$$NG : GK = PM : MK = 1 : 2 .$$

Тогда, если $NG = 2x$, то $GK = 4x$, а $LN = 3x$. Откуда опять по теореме Фалеса имеем

$$LQ : QM = LN : NG = 3x : 2x = 3 : 2 .$$

Таким образом, искомое расстояние равно $\frac{3}{5} \cdot 10 = 6$ (км.)

Отметим, что при поиске отношения $LQ : QM$ можно использовать теорему Менелая. Точки N , Q и P лежат на одной прямой, поэтому $\frac{KN}{NL} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{MP}{PK} = 1$ или $\frac{2}{1} \cdot \frac{LQ}{QM} \cdot \frac{1}{3} = 1$. Следовательно, $\frac{LQ}{QM} = \frac{3}{2}$.

5. Одна сторона некоторого треугольника в два раза больше другой, а периметр этого треугольника равен 60, наибольшая его сторона в сумме с учетверенной наименьшей равна 71. Найдите стороны этого треугольника. (7 баллов)

Ответ: 11, 22, 27.

Решение:

Обозначим через a , b , c стороны треугольника, без ограничения общности, будем считать, что $a \leq b \leq c$. Учитывая условие задачи, запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b + c = 60, \\ 4a + c = 71. \end{cases}$$

Так как одна из сторон треугольника в 2 раза больше другой, то рассмотрим три возможных случая.

1) Если $c=2b$, то $a + b \leq 2b = c$. Следовательно, не выполняется неравенство треугольника

$a + b > c$, необходимое для существования треугольника.

2) Если $c=2a$, то из второго условия системы находим $6a = 71$, $a = \frac{71}{6}$, тогда $c = \frac{71}{3}$.

Затем находим значение b из первого уравнения $b = \frac{147}{6}$, откуда следует $b > c$, что противоречит, что $a \leq b \leq c$.

3) Если $b=2a$, то система запишется в виде:

$$\begin{cases} 3a + c = 60, \\ 4a + c = 71. \end{cases}$$

Откуда $a = 11$, $c = 27$, $b = 22$. Полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Замечание: за правильное решение, найденное подбором – 1балл.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ
ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019
МАТЕМАТИКА (8 КЛАСС)
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
2 ВАРИАНТ
(ОТВЕТЫ)

1. Вычислите:

$$\frac{2 \cdot 2018}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2018}} \quad (7 \text{ баллов})$$

Ответ: 2019.

Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

2. Найдите все пары чисел (a, b) , при которых функция

$$f(x) = \frac{(2a + 3b)x + a + 2b}{ax + b}$$

постоянна во всей области ее определения. (7 баллов)

Ответ: $a = \pm\sqrt{3}b$, $b \neq 0$.

Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

3. Решите в целых числах уравнение: $x^2 - xy - 2y^2 = 7$. (7 баллов)

Ответ: $\{(3; -2), (5; 2), (-3; 2), (-5; -2)\}$

Решение: решение этой задачи полностью совпадает с решением задачи в варианте 1 под тем же номером.

Замечание: за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

4. Из городка «Ух» в городок «Ах» в 11⁰⁰ утра выехал Иван на своем велосипеде, проехав две пятых пути, он миновал городок «Ох», из которого в этот момент времени в городок «Ух» отправился Петр пешком. В тот момент времени, когда Иван прибыл в городок «Ах», оттуда в обратном направлении выехал Николай на своем велосипеде и прибыл в городок «Ух» в 12⁰⁰ этого же дня. В скольких километрах от городка «Ах» Николай догнал Петра, если Петр прибыл в городок «Ух» в 13³⁰ того же дня, при этом скорость

каждого участника движения была постоянной, а расстояние между городками «Ух» и «Ах» составляет всего

7 км.

(7 баллов)

Ответ: 5 км.

Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

5. Одна сторона некоторого треугольника в два раза больше другой, а периметр этого треугольника равен 56, учетверенная наименьшая сторона на 21 длиннее наибольшей из сторон. Найдите стороны этого треугольника. (7 баллов)

Ответ: 11, 22, 23.

Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

Замечание: за правильное решение, найденное подбором – 1балл.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Рисунки и графики к задачам.

8 класс. Задача 4.

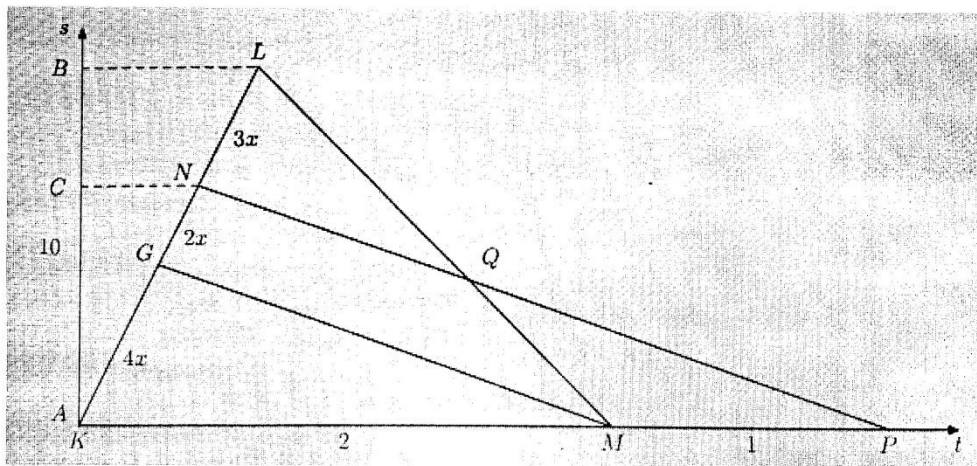


Рис.1

9 класс. Задача 5.

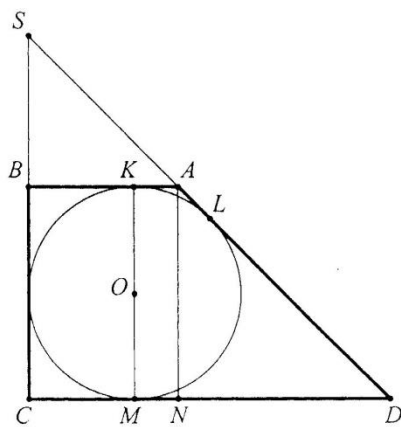


Рис.2

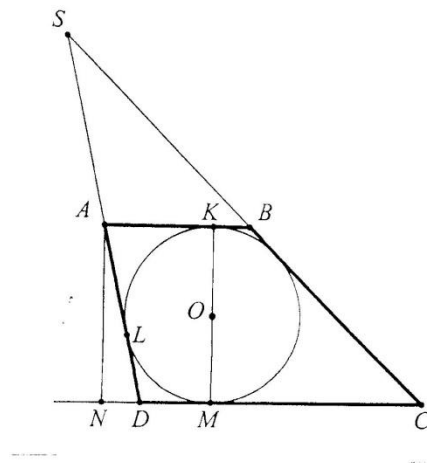


Рис.3