МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ
ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019
МАТЕМАТИКА (10 КЛАСС)
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
1 ВАРИАНТ
(ОТВЕТЫ)

1. Найдите сумму:
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{2020\sqrt{2019}+2019\sqrt{2020}}.$$

(7 баллов)

Ответ: $\mathbf{1-\frac{1}{\sqrt{2020}}=\frac{\sqrt{2020}-1}{\sqrt{2020}}}$.
Решение: Поскольку
$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}{(n+1)n(n+1-n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$
то, учитывая условие задачи, получаем
$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{2020\sqrt{2019}+2019\sqrt{2020}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}}-\frac{1}{\sqrt{2020}}=1-\frac{1}{\sqrt{2020}}=\frac{\sqrt{2020}-1}{\sqrt{2020}}.$$

2. Докажите, что для $a<1,\ b<1,\ a+b\geq\frac{1}{2}$ выполняется неравенство
$$(1-a)(1-b)\leq\frac{9}{16}.$$
(7 баллов).

Решение: Так как $a<1,\ b<1,$ то $1-a>0,\ 1-b>0.$ Используя известное неравенство о средних, получим $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leq\frac{(1-a)+(1-b)}{2}=1-\frac{a+b}{2}\leq\frac{3}{4}$ при условии, что $a+b\geq\frac{1}{2}$, то есть $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leq\frac{3}{4}$. Возведем в квадрат последнее неравенство и получим требуемое неравенство $(1-a)(1-b)\leq\frac{9}{16}$. Таким образом, неравенство доказано.

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases}x+y-2018=(x-2019)\cdot y,\\ x+z-2014=(x-2019)\cdot z,\\ y+z+2=y\cdot z.\end{cases}$$
(**7** баллов)

Ответ: (2022, 2, 4), (2018, 0,−2).

Решение: Введем замену переменной $\tilde{x}=x-2019$. Тогда система примет вид $\begin{cases}\tilde{x}+y+1=\tilde{x}\cdot y,\\ \tilde{x}+z+5=\tilde{x}\cdot z,\\ y+z+2=y\cdot z.\end{cases}$ Преобразуем систему к виду: $\begin{cases}(\tilde{x}-1)(y-1)=2,\\ (\tilde{x}-1)(z-1)=6,\\ (y-1)(z-1)=3.\end{cases}$ Сделаем замену переменных $a=\tilde{x}-1,\ b=y-1,\ c=z-1$. Тогда система примет вид:

$\begin{cases} ab = 2, \\ ac = 6, \\ bc = 3. \end{cases}$ Перемножим уравнения системы и получим $a^2b^2c^2 = 36$, откуда получаем, что $abc = \pm 6$. Используя последнее равенство, получим, что система в итоге имеет два решения: $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = 3. \end{cases}$ или $\begin{cases} a = -2, \\ b = -1, \\ c = -3. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} \tilde{x} - 1 = 2, \\ y - 1 = 1, \\ z - 1 = 3. \end{cases}$ или $\begin{cases} \tilde{x} - 1 = -2, \\ y - 1 = -1, \\ z - 1 = -3. \end{cases}$ Следовательно, $\begin{cases} \tilde{x} = 3, \\ y = 2, \\ z = 4. \end{cases}$ или $\begin{cases} \tilde{x} = -1, \\ y = 0, \\ z = -2. \end{cases}$ В итоге получаем 2 решения системы $\begin{cases} x = 2022, \\ y = 2, \\ z = 4. \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2018, \\ y = 0, \\ z = -2. \end{cases}$

Замечание: за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

4. В магазине «Все для школы» в продаже имеется мел в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было 3:4:6. В результате продаж и поставок со склада это соотношение изменилось и стало 2:5:8. Известно, что число пачек превосходного мела возросло на 80%, а обычного мела − уменьшилось не более чем на 10 пачек. Сколько всего пачек мела было в магазине сначала?

(7 баллов)

Ответ: 260 пачек.

Решение: Пусть x – исходное число пачек обычного мела, тогда число пачек необычного равно $\frac{4x}{3}$. Так как последнее число – целое, то $x = 3n$, где $n \in N$. Следовательно, исходные количества пачек всех трех сортов составляют $3n$, $4n$, $6n$ соответственно.
После продаж и поставок количество превосходного мела составило $(1 + 0.8)6n = \frac{54n}{5}$, а необычного – $\frac{54n}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{27n}{4}$ пачек. Эти числа – целые, следовательно, делятся на 4 и 5, то есть $n = 20m$, где $m \in N$. Число пачек обычного мела будет равно $\frac{27n}{20} \cdot 2 = \frac{27n}{10}$. Учитывая условие задачи (число пачек обычного мела уменьшилось не более чем на 10 пачек), получим $0 < 3n - \frac{27n}{10} = (60 - 54)m = 6m \leq 10$. Последнему неравенству удовлетворяет лишь одно натуральное число $m = 1$. Откуда следует, что $n = 20m = 20$.
Таким образом, исходное количество пачек мела в магазине было равным

$$3n+4n+6n = 13n = 13 \cdot 20 = 260.$$

5. Расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей ω_1 и ω_2 равно $5r$, а их радиусы равны соответственно r и $7r$. Хорда окружности ω_2 касается окружности ω_1 и делится точкой касания в отношении 1:6. Найдите длину этой хорды. **(7 баллов)**

Ответ: $\boldsymbol{7r\sqrt{3}}$ или $\boldsymbol{\frac{7r}{6}\sqrt{143}}$.

Решение: Пусть O_1 – центр первой окружности ω_1, точка M – точка касания этой окружности с хордой AB. Из центра O_2 второй окружности ω_2 проведем $O_2K \perp AB$, где точка K –середина хорды AB. Опустим $O_1L \perp O_2K$ и рассмотрим три различных случая расположения хорды AB и центров O_1 и O_2.
1) Пусть O_1, O_2 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB и $O_2K \geq r$ (рис.4). Так как $KL = O_1M = r$, то L лежит на отрезке O_2K. Пусть $AM = x$, тогда $AB = 7x$, $BK = 7x/2$, $MK = O_1L = 5x/2$. В прямоугольном ΔO_2KB имеем $O_2K = \frac{7}{2}\sqrt{4r^2 - x^2}$. В

прямоугольном $\Delta O_1 O_2 L$ имеем $O_1, O_2 = 5r$, $O_1 L = \frac{5x}{2}$, откуда получаем, что $O_2 L = \frac{5}{2}\sqrt{4r^2 - x^2}$. Учитывая, что $O_2 L + KL = O_2 K$, получаем уравнение $r = \sqrt{4r^2 - x^2}$. Решая его, находим $x = r\sqrt{3}$. Следовательно, $AB = 7r\sqrt{3}$.
2) Пусть O_1, O_2 по-прежнему лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB (рис.5), но $O_2 K < r$ (в частности, может быть $O_2 = K$, то есть AB - диаметр). Следовательно, L лежит на продолжении отрезка $O_2 K$, при этом $O_2 K + O_2 L = KL$. Выражения для $O_2 K$, $O_2 L$, KL через x и r сохраняются, а уравнения для нахождения x примет вид $r = 6\sqrt{4r^2 - x^2}$. Решая его, находим $x = r\frac{\sqrt{143}}{6}$. Следовательно, $AB = 7r\frac{\sqrt{143}}{6}$.
3) Пусть O_1, O_2 лежат по разные стороны относительно прямой AB (рис.6). Следовательно, L лежит на продолжении отрезка $O_2 K$, при этом $O_2 K + KL = O_2 L$. Выражения для $O_2 K$, $O_2 L$, KL через x и r сохраняются, а уравнения для нахождения x примет вид $r + \sqrt{4r^2 - x^2} = 0$ и решений не имеет.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
СОВЕТ РЕКТОРОВ ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ
ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018-2019
МАТЕМАТИКА (10 КЛАСС)
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
2 ВАРИАНТ
(ОТВЕТЫ)

1. Вычислите:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{2019\sqrt{2018}+2018\sqrt{2019}}.$$

(**7** баллов)

Ответ: $\mathbf{1-\frac{1}{\sqrt{2019}}=\frac{\sqrt{2019}-1}{\sqrt{2019}}}$.

Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

2. Докажите, что для $a<1,\ \ b<1,\ \ a+b\geq\frac{1}{3}$ выполняется неравенство

$$(1-a)(1-b)\leq\frac{25}{36}.$$

(7 баллов)

Решение: Так как $a<1,\ b<1,$ то $1-a>0,\ 1-b>0.$ Используя известное неравенство о средних, получим $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leq\frac{(1-a)+(1-b)}{2}=1-\frac{a+b}{2}\leq\frac{5}{6}$ при условии, что $a+b\geq\frac{1}{3}$, то есть $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leq\frac{5}{6}$. Возведем в квадрат последнее неравенство и получим требуемое неравенство $(1-a)(1-b)\leq\frac{25}{36}$. Таким образом, неравенство доказано.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}x+y-2018=(y-2019)\cdot x,\\ y+z-2017=(y-2019)\cdot z,\\ x+z+5=x\cdot z.\end{cases}$$

(**7** баллов)

Ответ: (3, 2021, 4), $(-1$, 2019,$-2)$.
Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.
Замечание: за каждое правильное решение, найденное подбором – 1балл.

4. В магазине «Все для школы» в продаже имеется мел в пачках трех сортов: обычный, необычный и превосходный. Сначала количественное соотношение по сортам было 2:3:6. После того как в магазин поступило некоторое количество пачек обычного и необычного мела общим числом не более 100 пачек, а 40% от пачек превосходного мела было продано, количественное соотношение изменилось и стало 5:7:4. Сколько всего пачек мела было продано в магазине? **(7 баллов)**
Ответ: 24 пачки.
Решение: аналогичное решение этой задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером.

5. Расстояние между центрами O_1 и O_2 окружностей ω_1 и ω_2 равно $10r$, а их радиусы равны соответственно $5r$ и $6r$. Прямая, пересекающая окружность ω_1 в точках M и N касается окружности ω_2 в точке K, причем MN=2NK. Найдите длину хорды MN. **(7 баллов)**

Ответ: $\boldsymbol{2r\sqrt{21}}$ или $\boldsymbol{6r}$.

Решение: решение подобной задачи присутствует в варианте 1 под тем же номером, отличие состоит в том, что возможны 2 случая расположения хорды и окружностей:
1) точка касания с окружностью ω_2 лежит вне окружности ω_1; 2) точка касания с окружностью ω_2 лежит внутри окружности ω_1.

Критерии оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное обоснованное решение.
6	Обоснованное решение с несущественными недочетами.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи.
1	Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.
0	Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

Приложение

10 класс. Задача 5.

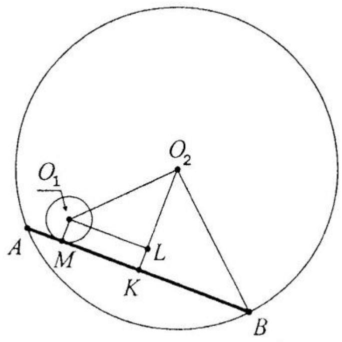

Рис.4

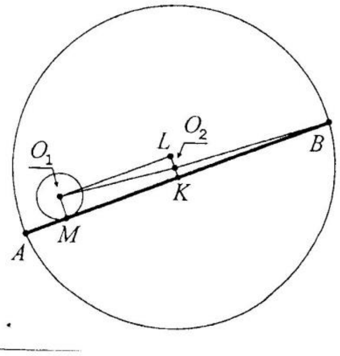

Рис.5

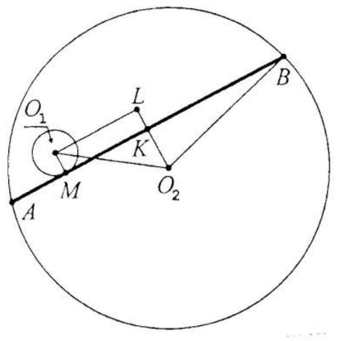

Рис.6

11 класс. Задача 5.

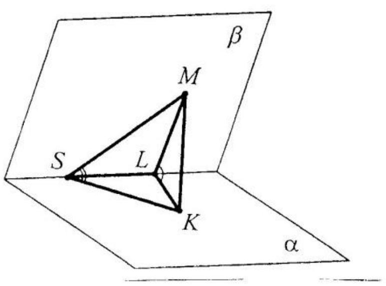

Рис.7

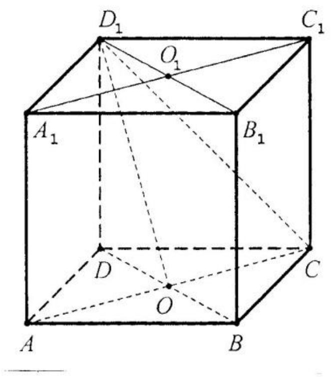

Рис.8