ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2022

комплекс предметов «Инженерные системы»
(математика, информатика, физика, химия),
2021/22 учебный год.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

Условия задач
(решения / ответы)

8–9 класс

Задача 1. (5 баллов)

1.1. Ленинградская атомная электростанция (ЛАЭС) вырабатывает за год примерно 28 млрд кВт · ч энергии. Сколько лет потребуется ЛАЭС, чтобы выработать столько же энергии, сколько Солнце вырабатывает за секунду? Светимость Солнца составляет $4 \cdot 10^{27}$Дж/с.

Решение. Найдем, сколько энергии ЛАЭС вырабатывает за 1 секунду:

$$28 \cdot 10^9 \cdot 10^3 \text{ Вт} \cdot \frac{\text{час}}{\text{год}} = 2{,}8 \cdot 10^{13} \ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \cdot \frac{3600 \text{ с}}{(365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600) \text{ с}} \approx 3{,}2 \cdot 10^9 \ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

Значит, $4 \cdot 10^{27}$Дж ЛАЭС выработает за

$$\frac{4 \cdot 10^{27}}{3{,}2 \cdot 10^9} = 1{,}25 \cdot 10^{18} \text{ с} \approx 40 \text{ млрд лет.}$$

Ответ: 40 млрд лет.

1.2. Кольская атомная электростанция (АЭС) вырабатывает за год примерно 9 млрд кВт · ч энергии. Сколько лет потребуется Кольской АЭС, чтобы выработать столько же энергии, сколько Солнце вырабатывает за минуту? Светимость Солнца составляет $4 \cdot 10^{27}$Дж/с.

Ответ: 7,6 трлн лет.

1.3. Балаковская атомная электростанция (АЭС) вырабатывает за год примерно 31 млрд кВт · ч энергии. Сколько лет потребуется Балаковской АЭС, чтобы выработать столько же энергии, сколько Солнце вырабатывает за час? Светимость Солнца составляет $4 \cdot 10^{27}$Дж/с.

Ответ: 130 трлн лет.

Задача2. (5 баллов)

2.1. Автомобиль Rimac Nevera оснащается четырьмя электродвигателями, а Tesla Model S Plaid -тремя и имеет мощность почти вдвое меньше. В рамках схватки электромобили провели заезд на 0,5 км. За какое время каждый автомобиль преодолеет всю дистанцию, если известно, что Tesla разгоняется до 100 км/ч за 2.1 с и имеет максимальную скорость 322 км/ч, а Rimac разгоняется до 300 км/ч за 9.3 с и его максимальная скорость 412 км/ч. Ускорение считать постоянным.

Решение.

Переведем все заданные в условии скорости в м/с:

Rimac

$$v_R = 300\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 300 \cdot \frac{1000\text{м}}{3600\text{с}} = 83{,}333\text{м/с}$$

$$v_{maxR} = 412\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 114{,}444\text{м/с}$$

Tesla

$$v_T = 100\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 27{,}778\text{м/с}$$

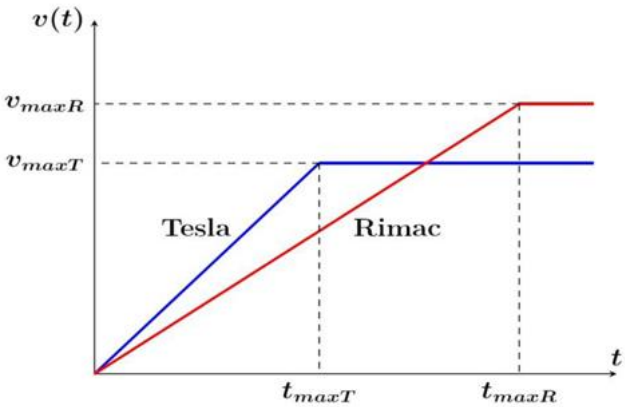
$$v_{maxT} = 322\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 89{,}444\text{м/с}$$

Найдем ускорение обоих автомодилей:

Rimac: $a_R = \frac{83.333\text{м/с}}{9{,}3\text{с}} = 8{,}961\text{м/с}^2$

Tesla: $a_T = \frac{27.778\text{м/с}}{2{,}1\text{с}} = 13{,}228\text{м/с}^2$

Согласно условию, скорость каждого из автомобилей после старта растет линейно за счет движения с постоянным ускорением, а затем, достигнув максимального значения, остается постоянной (график изменения скорости электромобилей представлен на рисунке).



Rimac достигает своей максимальной скорости за время:

$$t_{maxR} = \frac{v_{maxR}}{v_R} = 12{,}771\text{с}$$

А Tesla за время:

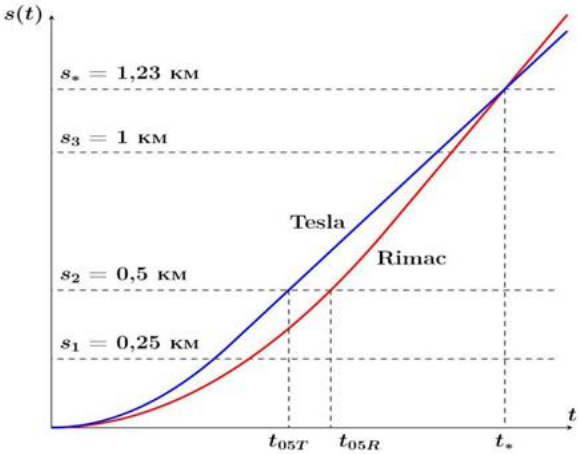
$$t_{maxT} = \frac{v_{maxT}}{v_T} = 6{,}762\text{с}$$

До достижения максимальной скорости пройденный путь электромобиля, который двигается с постоянным ускорением, растет с течением времени квадратично как $at^2/2$; после достижения максимальной скорости пройденный путь растет линейно как $v_{max}t$. Таким образом, пройденный путь электромобиля:

$$s(t) = \frac{at^2}{2}, \quad \text{если } t < t_{max},$$

$$s(t) = \frac{at_{max}^2}{2} + v_{max}(t - t_{max}), \quad \text{если } t > t_{max},$$

График изменения пройденного пути представлен на рисунке:



Видно, что расстояния, равные 0,25км, 0,5км и 1км быстрее проходит Tesla за счет большего ускорения. На расстояниях, больших 1,23км вперед выходит Rimac за счет большей максимальной скорости. Расстояние 1,23км оба автомобиля проходят за *t*=17.13с

Посчитаем, за какое время оба электромобиля проходят расстояние 0,5км (500м). До достижения максимальной скорости Rimac проходит:

$$\frac{at_{maxR}^2}{2} = 730{,}840 > 500\text{м},$$

$$t_{0.5R} = \sqrt{\frac{500 \cdot 2}{a_R}} = 10{,}564c.$$

Tesla же до достижения максимальной скорости проходит:

$$\frac{at_{maxT}^2}{2} = 302{,}423 < 500\text{м}$$

$$t_{0.5T} = t_{maxT} + \sqrt{\frac{(500 - 302.423)\text{м}}{v_{maxT}}} = 6.762c + 1.486c = 8.248c.$$

Следовательно: $t_{0.5R} > t_{0.5T}$ т.е. на дистанции 500м Tesla быстрее чем Rimac.

Ответ: *t*=10,56с (Rimac); *t*=8,25с (Tesla).

2.2. Автомобиль Rimac Nevera оснащается четырьмя электродвигателями, а Tesla Model S Plaid -тремя и имеет мощность почти вдвое меньше. В рамках схватки электромобили провели заезд на 0,25 км. За какое время каждый автомобиль преодолеет всю дистанцию, если известно, что Tesla разгоняется до 100 км/ч за 2.1 с и имеет максимальную скорость 322 км/ч, а Rimac разгоняется до 300 км/ч за 9.3 с и его максимальная скорость 412 км/ч. Ускорение считать постоянным.

Ответ: *t*=7,47с (Rimac); *t*=6,15с (Tesla).

2.3. Автомобиль Rimac Nevera оснащается четырьмя электродвигателями, а Tesla Model S Plaid -тремя и имеет мощность почти вдвое меньше. В рамках схватки электромобили провели заезд на 1 км. За какое время каждый автомобиль преодолеет всю дистанцию, если известно, что Tesla разгоняется до 100 км/ч за 2.1 с и имеет максимальную скорость 322 км/ч, а Rimac разгоняется до 300 км/ч за 9.3 с и его максимальная скорость 412 км/ч. Ускорение считать постоянным.

Ответ: *t*=14,94с (Rimac); *t*=9,56с (Tesla).

Задача 3. (5 баллов)

3.1. Изотопологи – соединения одних и тех же химических веществ, отличающихся изотопным составом.

В таблице ниже представлен изотопный состав природного хлора и кислорода в процентах по массе:

Изотоп	^{16}O	^{17}O	^{18}O	^{35}Cl	^{37}Cl
Содержание	99,758	0,039	0,203	75,53	24,47

1. Какое число изотопологов оксида хлора(I) существует?
2. Рассчитайте, во сколько раз отличаются массы наиболее тяжелого и наиболее легкого изотопологов оксида хлора(I).
3. Рассчитайте, чему была бы равна относительная атомная масса кислорода, если бы содержание его природных изотопов было бы равным.
4. Считая изотопный состав указанных элементов постоянным, рассчитайте сколько атомов изотопов хлора каждого вида содержит 100 грамм газообразного хлора Cl_2?

Решение.

Формула оксида хлора(I) Cl_2O. Каждая молекула содержит два атома хлора и один атом кислорода. С учетом природного изотопного состава хлора и кислорода существует несколько изотопологов этого соединения: например, три, содержащие кислород-16 $^{35}Cl^{35}Cl^{16}O$, $^{35}Cl^{37}Cl^{16}O$, $^{37}Cl^{37}Cl^{16}O$. Всего таких изотопологов Cl_2O существует девять.

2. Наиболее легкий изотополог имеет состав $^{35}Cl^{35}Cl^{16}O$, наиболее тяжелый $^{37}Cl^{37}Cl^{18}O$. Масса одного моль наиболее легкого составляет 35+35+16 = 86 г/моль, наиболее тяжелого – 37+37+18 = 92 г/моль. Таким образом, при замене легких изотопов тяжелыми масса возрастает в 1,07 раз.

3. Расчет относительной атомной массы кислорода с учетом природного содержания изотопов составляет:

$$A_r(O) = \frac{\omega_1 * m({}^{16}_{8}O) + \omega_2 * m({}^{17}_{8}O) + \omega_3 * m({}^{18}_{8}O)}{\frac{1}{12} * m({}^{12}_{6}C)} =$$

$$= \frac{0{,}99758 * 16 + 0{,}00039 * 17 + 0{,}00203 * 18}{\frac{1}{12} * 12} = 16$$

В случае равенства содержания природных изотопов (≈33,33%):

$$A_r(O) = \frac{\omega_1 * m({}^{16}_{8}O) + \omega_2 * m({}^{17}_{8}O) + \omega_3 * m({}^{18}_{8}O)}{\frac{1}{12} * m({}^{12}_{6}C)} =$$

$$= \frac{0{,}3333 * 16 + 0{,}3333 * 17 + 0{,}3333 * 18}{\frac{1}{12} * 12} = 17$$

4. Если изотопный состав постоянен, то масса каждой порции газообразного хлора складывается из масс изотопологов с учетом их доли (природного содержания).
Найдем массу атомов ^{35}Cl в 100 граммах газообразного хлора:

$$\omega({}^{35}_{17}Cl) = \frac{m({}^{35}_{17}Cl)}{m_{\text{обр}}}\ ; m({}^{35}_{17}Cl) = 0{,}7553 * 100 = 75{,}53 \text{ г}$$

Аналогично найдем массу атомов ^{37}Cl. Она равна 24,47 г.
Найдем число атомов:

$$\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}\ ; N({}^{35}_{17}Cl) = \frac{6{,}022 * 10^{23} * 75{,}53}{35} = 1{,}3 * 10^{24} \text{ атомов}$$

Аналогично ведем расчет для атомов ^{37}Cl. Их количество составляет $4*10^{23}$ атомов.

Ответ:
1. N_2O, 9 изотопологов
2. В 1,09 раз.
3. 17.
4. $N(^{37}Cl) = 4*10^{23}$ атомов, $N(^{35}Cl) = 1{,}3*10^{24}$ атомов.

3.2. Изотопологи – соединения одних и тех же химических веществ, отличающихся изотопным составом.
В таблице ниже представлен изотопный состав природного азота и кислорода в процентах по массе:

Изотоп	^{16}O	^{17}O	^{18}O	^{14}N	^{15}N
Содержание	99,758	0,039	0,203	99,635	0,365

1. Какое число изотопологов оксида азота(I) существует?
2. Рассчитайте, во сколько раз отличаются массы наиболее тяжелого и наиболее легкого изотопологов оксида азота(I).
3. Рассчитайте, чему была бы равна относительная атомная масса кислорода, если бы содержание его природных изотопов было бы равным.
4. Считая изотопный состав указанных элементов постоянным, рассчитайте сколько атомов изотопов хлора каждого вида содержит 100 грамм газообразного азота N_2?

Ответ:
1. N_2O, 9 изотопологов
2. В 1,09 раз.
3. 17.
4. $N(^{14}N) = 4{,}3*10^{24}$ атомов, $N(^{15}N) = 1{,}5*10^{22}$ атомов.

Задача 4. (5 баллов)

4.1. Миша и Маша играют в игру с вещественными числами: Миша первым придумывает и объявляет число a, потом Маша – число b, причем $b \neq a$. Миша вычисляет значение выражения $M_1 := \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$, Маша вычисляет значение выражения $M_2 := \frac{2}{1+ab}$. Если $M_1 > M_2$, то в игре побеждает Миша, а Маша побеждает в противном случае.

А) Напишите компьютерную программу, которая определяет победителя игры для всех значений $-5 \le a \le 5$ и $-5 \le b \le 5$ шагом 0,1 и выводит на экран частоту побед Миши.
Б) Укажите для Маши выигрышную стратегию.

Решение:
А) Программа перебирает все возможные варианты (два вложенных цикла) с шагом 0,1. Необходимо обратить внимание на возможность выполнения равенства $1 + ab = 0$. Условие задачи этот случай явно не регламентирует, но стандартные правила математики продолжают действовать, будем считать в таком случае игру не состоявшейся и не будем учитывать при подсчете частоты выигрыша Миши. Кроме того, обращение с вещественными числами требует аккуратности при сравнении значений.
Пример программы на языке Pascal:

```
program Game;
var
   a,b, M1, M2 : real;
   i, j : integer;

begin
  i:=0; // счетчик количества игр
  j:=0; // счетчик количества побед Миши
  a:=-5.0;
  b:=-5.0;
  while a<5.01 do
  begin
    while b<5.01 do
    begin
      if ((abs(1+a*b) >0.001) and (abs(a-b)>0.001)) then // проверка значений a и b
      begin
        i:=i+1;
        M1:=1/(1+a*a)+1/(1+b*b);
        M2:=2/(1+a*b);
        if (M1-M2 > 0) then
        begin
          j:=j+1;
        end;
      end;
      b:=b+0.1;
    end;
    a:=a+0.1;
    b:=-5.0;
  end;
  writeln('Количество игр:',i);
  writeln('Количество побед Миши:',j);
  writeln('Частота побед Миши:', (j/i):2:5);
end.
```

Б) Рассмотрим $M_1 - M_2 = \frac{(ab-1)(a-b)^2}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \le 0$ при $-1 < ab \le 1$ или $a = b$, но $a \ne b$ по условию. Если Миша объявляет свое число первым, то Маша действительно всегда может выбрать число, гарантирующее ей победу: если $a = 0$, то $b -$ любое число, кроме 0; если $a = 1$, то $b -$ любое число из интервала $(-1; 1)$; если $a \ne 0$ и $a \ne 1$,

то, например, $b = \frac{1}{a}$. (Это, конечно, не единственное возможное правило выбора числа b для Маши.)

4.2. Миша и Маша играют в игру с вещественными числами: Миша первым придумывает и объявляет число a, потом Маша – число b, причем $b \neq a$. Миша вычисляет значение выражения $M_1 := \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$, Маша вычисляет значение выражения $M_2 := \frac{2}{1+ab}$. Если $M_1 > M_2$, то в игре побеждает Миша, а Маша побеждает в противоположном случае.
А) Напишите компьютерную программу, которая определяет победителя игры для всех значений $-10 \leq a \leq 10$ и $-10 \leq b \leq 10$ шагом 0,2 и выводит на экран частоту побед Миши.
Б) Может ли Миша выбирать число a так, чтобы Маша выигрывала, даже выбирая число b случайным образом?

Ответ:
А) в программе, приведенной для задачи 4.1, нужно изменить граничные значения a и b и шаг.
Б) Если Миша выбирает a=0, то Маша может назвать любое число (кроме b=0) и победить.

4.3. Миша и Маша играют в игру с вещественными числами: Миша придумывает и объявляет число a, Маша – число b, причем $b \neq a$. Миша вычисляет значение выражения $M_1 := \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}$, Маша вычисляет значение выражения $M_2 := \frac{2}{1+ab}$. Если $M_1 > M_2$, то в игре побеждает Миша, а Маша побеждает в противоположном случае.
А) Напишите компьютерную программу, которая определяет победителя игры для всех значений $-5 \leq a \leq 5$ и $-5 \leq b \leq 5$ шагом 0,1 и выводит на экран частоту побед Маши.
Б) Может ли кто-то из участников гарантировать себе победу в игре?

Ответ:
А) в программе, приведенной для задачи 4.1, можно изменить последние две строки на writeln('Количество побед Маши:',i-j); writeln('Частота побед Маши:', (1-j/i):2:5).
Б) гарантировать себе победу может участник, который выбирает число вторым, если Миша и Маша называют числа в какой-то очередности. Если они предъявляют числа одновременно (например, записав их на карточках), то гарантировать победу не может ни один из участников.