ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2022

комплекс предметов «Инженерные системы»
(математика, информатика, физика, химия),
2021/22 учебный год.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Условия задач
(решения / ответы)

8–9 класс

Задача 1. (5 баллов)

1.1. Ракета Falcon 9 с туристическим экипажем на борту за 160 с после старта разгоняется до скорости 7025 км/ч, набирая высоту 81,1 км, на которой разделяются ступени. Определите угол наклона траектории к горизонту, если считать, что движение ракеты прямолинейное и равноускоренное. Шарообразность Земли не учитывать.

Решение.
Переведем заданную в условии скорости в м/с: 7025/3.6 = 1951 м/с
Найдем ускорение:

$$a = {}^{V}/_{t} = {}^{1951}/_{160} = 12{,}19 \text{ м/с}^2$$

Найдем путь:

$$S = at^2 = 12{,}19 \cdot 160^2 = 312064\text{м} \approx 312{,}1\text{км}$$

Угол наклона траектории:

$$arcsin\left({}^{81{,}1}/_{312{,}1}\right) \approx 15{,}6°$$

Ответ: ≈ 15.06°

1.2. Ракета Falcon 9 с туристическим экипажем на борту стартует под углом 15° к горизонту и за 160 с разгоняется до скорости 7025 км/ч, при которой разделяются ступени. Определите, на какой высоте произошло разделение ступеней, если считать, что движение ракеты прямолинейное и равноускоренное. Шарообразность Земли не учитывать.

Ответ: ≈ 81 км

Задача 1. (5 баллов)
Задача 2. (5 баллов)

2.1. У Васи есть 4 грузика и двое электронных весов: если на одни из них положить грузик массой m грамм, то они показывают на табло число, равное m («прямые» весы), а если этот же грузик положить на вторые весы, то они показывают число, равное $1/m$ («обратные» весы). Вася положил один из своих грузиков на «прямые» весы, а три остальные — на «обратные». При этом и те, и другие весы показали на табло одинаковое число. После того как Вася переложил один из грузиков с «обратных» весов на «прямые», показания обоих весов снова совпали. Найдите массы всех Васиных грузиков, если известно, что их суммарная масса равна 3 грамма и что массы по крайней мере двух из них одинаковы.

Решение. Обозначим массы Васиных грузиков через m_1, m_2, m_3 и m_4, а их суммарную массу — через M:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = M.$$

Пусть в первом случае равенства показаний весов на «прямых» весах был грузик m_1, а на «обратных» — грузики m_2, m_3 и m_4. Тогда

$$m_1 = \frac{1}{m_2 + m_3 + m_4} = \frac{1}{M - m_1}.$$

Значит,

$$m_1(M - m_1) = 1. \qquad (*)$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$m_1{}^2 - Mm_1 + 1 = 0$$

для определения m_1. Решение этого уравнения

$$m_1 = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4}}{2}.$$

Заметим, что при $M \geq 2$ оба этих корня являются вещественными положительными числами, поэтому могут представлять собой значение массы грузика (у нас по условию $M = 3$).

Будем считать, что Вася переложил с «обратных» весов на «прямые» грузик m_2. Тогда

$$m_1 + m_2 = \frac{1}{m_3 + m_4} = \frac{1}{M - m_1 - m_2} \ \rightarrow \ (m_1 + m_2)(M - m_1 - m_2) = 1.$$

Раскроем скобки в последнем равенстве:

$$m_1(M - m_1) - m_1 m_2 + m_2(M - m_1 - m_2) = 1$$

Принимая во внимание соотношение (*) и сокращая на m_2, получаем, что

$$M = 2m_1 + m_2 \ \rightarrow \ m_2 = M - 2m_1.$$

Подставим возможные значения массы m_1:

$$m_1 = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} \;\rightarrow\; m_2 = \sqrt{M^2 - 4}\,,$$

$$m_1 = \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} \;\rightarrow\; m_2 = -\sqrt{M^2 - 4}\,.$$

Вторая пара значений m_1 и m_2 нам не подходит, поскольку грузик не может иметь отрицательную массу.

Найдем массы двух оставшихся грузиков, m_3 и m_4. С одной стороны,

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4\,,$$

а с другой стороны, $M = 2m_1 + m_2$. Поэтому $m_3 + m_4 = m_1$. По условию хотя бы два грузика имеют одинаковые массы. Ясно, что $m_1 > m_3$ и $m_1 > m_4$. Сравним m_1 и m_2:

$$m_2 - m_1 = \sqrt{M^2 - 4} - \frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2} = \frac{3\sqrt{M^2 - 4} - M}{2} \geq 0\,,$$

если

$$3\sqrt{M^2 - 4} \geq M \;\rightarrow\; 9M^2 - 36 \geq M^2 \;\rightarrow M \geq \sqrt{4{,}5}\,.$$

В нашем случае это неравенство верно, поскольку $M = 3$.

Таким образом, $m_2 > m_1$. Это означает, что равные массы могут иметь только грузики m_3 и m_4:

$$m_3 = m_4 = \frac{m_1}{2} = \frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{4}.$$

Подставив заданное в условии задачи $M = 3$, получим искомые значения m_1, m_2, m_3 и m_4.

Ответ: $m_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $m_2 = \sqrt{5}$, $m_3 = m_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

2.2. У Василисы есть 4 грузика и двое электронных весов: если на одни из них положить грузик массой m грамм, то они показывают на табло число, равное m («прямые» весы), а если этот же грузик положить на вторые весы, то они показывают число, равное $1/m$ («обратные» весы). Василиса положила три своих грузика на «прямые» весы, а четвертый — на «обратные». При этом и те, и другие весы показали на табло одинаковое число. После того как Василиса переложила один из грузиков с «прямых» весов на «обратные», показания обоих весов снова совпали. Найдите массы всех Василисиных грузиков, если известно, что их суммарная масса равна 4 грамма и что массы по крайней мере двух из них одинаковы.

Ответ: $m_1 = 2 - \sqrt{3}$, $m_2 = 2\sqrt{3}$, $m_3 = m_4 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Задача 3. (5 баллов)

3.1. Миша и Маша играют в следующую игру: сначала Миша называет два различных натуральных числа, затем Маша тоже называет два различных натуральных числа, не совпадающих ни с одним из чисел Миши. Числа Миши служат длинами оснований, а числа Маши — длинами боковых сторон трапеции. Если трапеции с такими сторонами не существует, то игра заканчивается и победившим считается Миша. В противоположном случае Миша считает сумму большего основания и меньшей боковой стороны, а Маша — сумму меньшего основания и большей боковой стороны. Побеждает тот, у кого получилось меньшее число.

А) Предложите алгоритм, с помощью которого ребята могут проверить, существует ли трапеция с заданными ими длинами сторон.

Б) Всегда ли Маша может обеспечить себе выигрыш в такой игре?

Решение.

Обозначим основания возможной трапеции AD и BC (AD>BC), а боковые стороны – AB и CD (AB<CD). Опишем алгоритм построения трапеции ABCD. На отрезке AD отметим точку E такую, что AE=BC. Проведем окружность с центром в точке E с радиусом AB, проведем окружность с центром в точке D с радиусом DC. Если построенные окружности пересекаются в двух точках, то интересующая нас трапеция существует. Возьмем любую из двух точек пересечения – это и есть вершина C. Далее с помощью известных из школьного курса процедур можем построить через точку C прямую, параллельную AD и завершить построение искомой трапеции.

При каких условиях окружности, описанные выше, пересекаются? Сумма их радиусов должна быть больше расстояния между центрами, то есть

$$AB+CD>AD-BC \qquad (1)$$

но большей радиус не должен превышать сумму меньшего радиуса и расстояния между центрами, то есть

$$CD<(AD-BC)+AB \qquad (2)$$

Обратим внимание, что выполнение условия (2) влечет справедливость неравенства

$$BC+CD<AD+AB,$$

что эквивалентно гарантированной победе Маши в случае существования трапеции. Осталось выяснить, всегда ли Маша может обеспечить выполнение условий (1) и (2).

После того как Миша назвал свои числа, величина AD-BC становится известной и фиксированной, тогда обеспечить выполнение условия (1) можно всегда. Перепишем условие (2) в виде

$$CD-AB<AD-BC.$$

Поскольку условие задачи подразумевает использование только натуральных и различных длин сторон трапеции, то Миша может назвать такие числа, что AD-BC=1. В этом случае победа Маши невозможна.

3.2. Миша и Маша играют в следующую игру: сначала Миша называет два различных натуральных числа, затем Маша тоже называет два различных натуральных числа, не совпадающих ни с одним из чисел Миши. Числа Миши служат длинами оснований, а числа Маши — длинами боковых сторон трапеции. Если трапеции с такими сторонами не существует, то игра заканчивается и победившим считается Миша. В противоположном случае Миша считает сумму большего основания и меньшей боковой стороны, а Маша — сумму меньшего основания и большей боковой стороны. Побеждает тот, у кого получилось большее число.

А) Предложите алгоритм, с помощью которого ребята могут проверить, существует ли трапеция с заданными ими длинами сторон.

Б) Может ли Маша обеспечить себе выигрыш в такой игре?

Ответ: алгоритм аналогичен решению задачи 3.1.

Задача 4. (5 баллов)

4. В большую колбу помещены ортофосфорная кислота (объем, молярная концентрация и плотность раствора кислоты равны X_1, Y_1 и Z_1 соответственно) и гидроксид натрия (объем, молярная концентрация и плотность раствора гидроксида равны X_2, Y_2 и Z_2соответственно).
Составьте компьютерную программу, которая по входным параметрам (X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2) рассчитывает массовые доли веществ в конечном растворе.
Примечание:
а) входные данные могут быть считаны из файла, а результат записан в файл; в случае, если чтение данных из файла еще не изучались, то ввод их осуществляется с клавиатуры;
б) программа должна содержать комментарии, обеспечивающие понимание алгоритма работы программы.

Решение.

Понимаем, что в любом случае в конечной смеси одновременно могут находиться только ДВА максимум вещества. (В случае равенства одно вещество). Можно отдельно прописать случаи когда объем или концентрация одного из веществ 0.

Находим число молей кислоты и щелочи путем перемножения концентрации на объем:

число молей кислоты: $X_1 * Y_1 = n_к$
число молей щелочи: $X_2 * Y_2 = n_щ$

Сравниваем полученные числа. Возможны 4 варианта:

1) если $n_щ \le n_к$ в этом случае смесь состоит из двух веществ: дигидрофосфат и оставшаяся исходная кислота.

Число молей дигидрофосфата равно числу исходных молей щелочи: $n_{\text{диг}} = n_{\text{щ}}$, а число молей кислоты (остаток): $n_{\text{остаток}} = n_{\text{к}} - n_{\text{щ}}$.

Найдем массу (в граммах) дигидрофосфата путем умножения $n_{\text{диг}}$ на молярную массу дигидрофосфата натрия (которая равна 120):

$$M_{\text{диг}} = n_{\text{диг}} * 120$$

Массу остатка (в граммах) найдем аналогично т.е. умножив число молей ($n_{\text{остаток}}$) на молярную масса кислоты (которая равна 98):

$$M_{\text{остаток}} = n_{\text{остаток}} * 98$$

Масса конечного раствора состоит из массы составных его частей:

$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$

В процентах:

$$\frac{M_{\text{диг}}}{M_{end}} * 100\% \quad \text{и} \quad \frac{M_{\text{остаток}}}{M_{end}} * 100\%$$

2) если $n_{\text{щ}}/2 \le n_{\text{к}} \le n_{\text{щ}}$ тогда получаем смесь из дигидрофосфата и гидрофосфата.

Число молей гидрофосфата равно числу молей исходной щелочи за вычетом числа молей исходной кислоты:

$$n_{\text{гидрофосф}} = n_{\text{щ}} - n_{\text{к}} .$$

Число молей дигидрофосфата равно удвоенному числу молей исходной кислоты за вычетом числа молей исходной щелочи:

$$n_{\text{диг}} = 2 * n_{\text{к}} - n_{\text{щ}}$$

Найдем массу дигидрофосфата путем умножения $n_{\text{диг}}$ на молярную массу дигидрофосфата натрия (которая равна 120):

$$M_{\text{диг}} = n_{\text{диг}} * 120$$

Массу гидрофосфата найдем путем умножения $n_{\text{гидрофосф}}$ на молярную массу гидрофосфата натрия (которая равна 142):

$$M_{\text{гидрофосф}} = n_{\text{гидрофосф}} * 142$$

Масса конечного раствора:

$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$

В процентах:

$$\frac{M_{\text{диг}}}{M_{end}} * 100\% \quad \text{и} \quad \frac{M_{\text{гидрофосф}}}{M_{end}} * 100\%$$

3) если $n_{\text{щ}}/3 \le n_{\text{к}} \le n_{\text{щ}}/2$ тогда получаем смесь из гидрофосфата и фосфата.

Число молей фосфата равно числу молей исходной щелочи за вычетом удвоенного числа молей исходной кислоты:

$$n_{\text{фосфата}} = n_{\text{щ}} - 2 * n_{\text{к}}$$

Число молей гидрофосфата:

$$n_{\text{гидрофосф}} = 3 * n_{\text{к}} - n_{\text{щ}}$$

Находим массу:

$$M_{гидрофосф} = n_{гидрофосф} * 142$$
$$M_{фосф} = n_{фосф} * 164$$

Масса конечного раствора:
$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$
В процентах:

$$\frac{M_{гидрофосф}}{M_{end}} * 100\% \quad и \quad \frac{M_{фосф}}{M_{end}} * 100\%$$

4) если $n_щ/3 \geq n_к$ тогда раствор состоит из фосфата и щелочи.

Число молей фосфата равно числу молей исходной кислоты:
$$n_{фосфата} = n_к$$
Число молей щелочи (остаток):
$$n_{остаток} = 3 * n_щ - n_к$$

Массу и доли считаем аналогично предыдущим случаям:
$$M_{фосф} = n_{фосф} * 164$$
$$M_{щелочи} = n_{щелочи} * 40$$
Масса конечного раствора:
$$M_{end} = X_1 * Z_1 + X_2 * Z_2$$
В процентах:

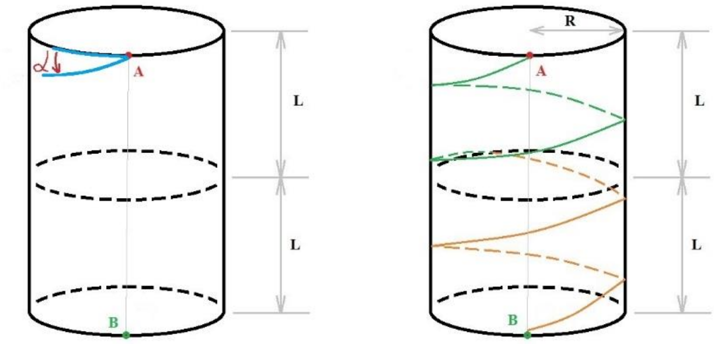
$$\frac{M_{щелочи}}{M_{end}} * 100\% \quad и \quad \frac{M_{фосф}}{M_{end}} * 100\%$$

<u>Примечание:</u> рассмотрены строгие неравенства, однако при равенстве условий т.е. в случаях когда выполняется:
$$n_щ/2 \leq n_к \leq n_щ \quad \textit{и/или} \quad n_щ/3 \leq n_к \leq n_щ/2$$
тогда раствор состоит из одного вещества и одна из массовых долей =0.

Программная реализация дынной задачи состоит в последовательной проверке условий для всех 4 пунктов, вычисление долей и вывод результатов на экран.

Задача 5. (5 баллов)

5. Посадочный модуль космического аппарата, который летит горизонтально к поверхности планеты, использует для спуска спиральную траекторию, лежащую на поверхности некоторого цилиндра с радиусом основания R. Начав спуск в точке A, высота которой равна $2L$, модуль должен приземлиться в точке B, расположенной на поверхности планеты точно под точкой A. При сходе с орбиты аппарат имеет скорость 20 единиц в секунду и изменяет траекторию на угол α, который отсчитывается против часовой стрелки от горизонтальной траектории аппарата (см. рисунок). При прохождении высоты L аппарат снижает скорость до 10 единиц в секунду и увеличивает угол до значения β.



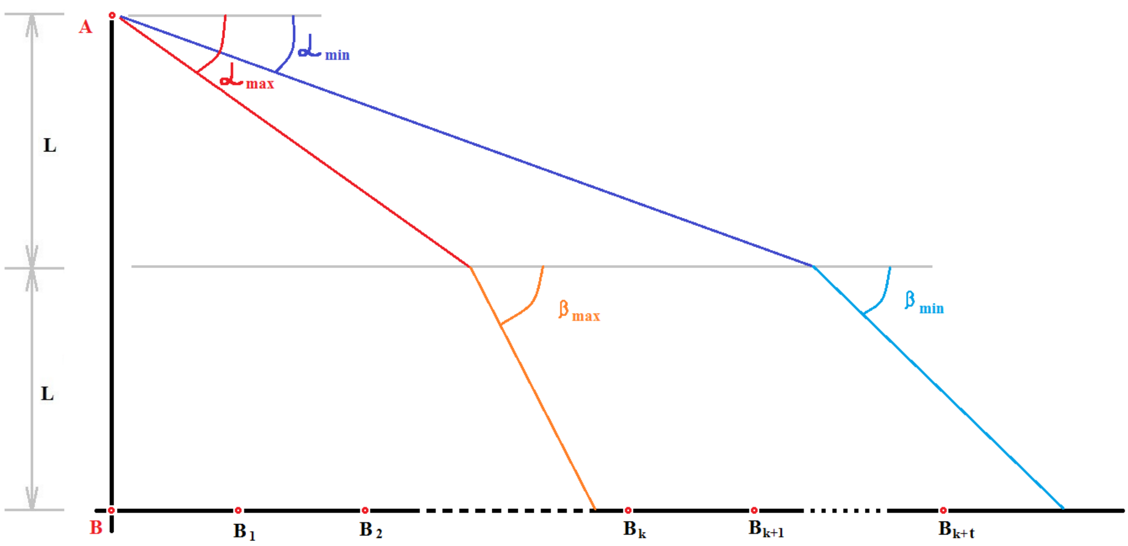
Пусть $R = 20$, $L = 50$, $5^o \leq \alpha \leq 10^o$, $15^o \leq \beta \leq 20^o$. Составьте компьютерную программу, которая найдет:

а) минимальное и максимальное количество витков спиральной траектории модуля для достижения точки B;

б) минимальное и максимальное время спуска модуля по спиральной траектории из точки A в точку B.

Решение.

«Разрежем» цилиндр по лини AB и рассмотрим его развертку на плоскости.
Точки B_k находится на расстоянии, кратном длине окружности R.
На высоте L проведем горизонтальную прямую на которой будет располагаться точка перехода (изменение угла снижения).



Угол α меняется от 5 до 10 градусов т.е. мы можем найти минимальное $l_{1(min)}$ и максимальное $l_{1(max)}$ расстояние на которое может улететь аппарат (по горизонтали) до того момента как угол снижения изменится на значение β.

Угол β меняется от 15 до 25 градусов т.е. мы можем найти минимальное $l_{2(min)}$ и максимальное $l_{2(max)}$ расстояние на которое может улететь аппарат от точки изменения угла до уровня точки B (по горизонтали).

Расстояние до точки B:

$$l_{min} = l_{1(min)} + l_{2(min)} = L * ctg\alpha_{max} + L * ctg\beta_{max} =$$
$$= 50 * [ctg10° + ctg20°] = 420{,}95,$$
$$l_{max} = l_{1(max)} + l_{2(max)} = L * ctg\alpha_{min} + L * ctg\beta_{min} =$$
$$= 50 * [ctg5° + ctg15°] = 758{,}1.$$

Если в промежуток [l_{min} ; l_{max}] попадает одна точка B_k то она является единственным решением для ответа на пункт 1 задачи. При этом k является количеством витков по цилиндру.
Если таких точек несколько то B_k покажет минимальное количество витков (k), а B_{k+t} покажет максимально количество витков ($k + t$).

Выясним сколько точек B может попасть в найденный промежуток [420,95 ; 758,1].
Т.к. расстояние между точками B кратно длине окружности т.е. $2\pi R$ то разделим каждую из границ на $2\pi R$ и округлим до целого следующим образом:

$$\frac{l_{min}}{2\pi R} = \frac{420{,}95}{2 * \pi * 20} \approx 3{,}3498$$

округлим в большую сторону т.е. минимально потребуется 4 витка.

$$\frac{l_{max}}{2\pi R} = \frac{758{,}1}{2 * \pi * 20} \approx 6{,}0328$$

округлим в меньшую сторону т.е. максимально потребуется 6 витков.

Время которое необходимо для спуска:

$$t_{min} = \frac{l_{1(min)}}{20} + \frac{l_{2(min)}}{10} = L * \left[\frac{ctg\alpha_{max}}{20} + \frac{ctg\beta_{max}}{10}\right] =$$
$$= 50 * \left[\frac{ctg10°}{20} + \frac{ctg20°}{10}\right] = 27{,}9175$$
$$t_{max} = \frac{l_{1(max)}}{20} + \frac{l_{2(max)}}{10} = L * \left[\frac{ctg\alpha_{min}}{20} + \frac{ctg\beta_{min}}{10}\right] =$$
$$= 50 * \left[\frac{ctg5°}{20} + \frac{ctg15°}{10}\right] = 47{,}235$$

Найденное время:

$$t_{min} = 27{,}9175$$
$$t_{max} = 47{,}235$$

является приближенными оценками и не дают ответ на вопрос №2 задачи т.к. это время для достижения уровня на котором находятся точки B_k, но это не время при котором достигается вполне определенная точка B_k.

Для ответа на вопрос №2 т.е. для поиска минимального и максимального времени спуска модуля по спиральной траектории из точки A в точку B необходимо, при некотором малом ε добиться выполнения условий :

$$|k_{min} - 4| \le \varepsilon,$$
$$|k_{max} - 6| \le \varepsilon.$$

Или иначе:

$$k_{min} = \frac{l_{min}}{2\pi R} = \frac{L * [ctg\alpha_{max} + ctg\beta_{max}]}{2\pi R} \to 4$$
$$k_{max} = \frac{l_{max}}{2\pi R} = \frac{L * [ctg\alpha_{min} + ctg\beta_{min}]}{2\pi R} \to 6$$

Это мы можем сделать путем изменения углов α и β в тех пределах который заданы в условии задачи.

Вычисление минимального времени можно оформить в виде программы:

Вычисляем: $t_{temp} = t_{min} = 27{,}9175$
Начало Цикла 1: изменяем α_{max} *в пределах от 10º до 5º с шагом 0,01,*
Начало Цикла 2: изменяем β_{max} *в пределах от 20º до 15º с шагом 0,01.*
Вычисляем k_{min}
Если $|k_{min} - 4| \leq \varepsilon$
тогда
вычисляем $t = L * \left[\frac{ctg\alpha}{20} + \frac{ctg\beta}{10}\right]$
если $t < t_{temp}$ *тогда* $t_{temp} := t$ *;*
Конец Цикла 2
Конец Цикла 1
Вывод на печать значения t_{temp}.

Вычисление максимального времени так же можно оформить в виде программы:

Вычисляем: $t_{temp} = t_{max} = 47{,}235$
Начало Цикла 1: изменяем α_{max} *в пределах от 5º до 10º с шагом 0,01,*
Начало Цикла 2: изменяем β_{max} *в пределах от 15º до 20º с шагом 0,01.*
Вычисляем k_{max}
Если $|k_{max} - 6| \leq \varepsilon$
тогда
вычисляем $t = L * \left[\frac{ctg\alpha}{20} + \frac{ctg\beta}{10}\right]$
если $t > t_{temp}$ *тогда* $t_{temp} := t$ *;*
Конец Цикла 2
Конец Цикла 1
Вывод на печать значения t_{temp}.

Следует заметить, что для вычисленного значения витков $k_{max} = 6{,}0328$ ответ о максимальном времени достаточно близок к искомому т.к. при условии $\varepsilon = 0{,}1$ выполняется условие:

$$|k_{max} - 6| \leq \varepsilon.$$

Однако при $\varepsilon = 0{,}01$ данное условие уже не будет выполняться.

В программный код, наряду с проверкой $|k_{max} - 6| \leq \varepsilon$, можно дополнительно включить проверку условия:

$$\left|t - t_{temp}\right| \leq \varepsilon.$$

Это приведет к более точному и надежному вычислению значений времени.