10–11 класс

Задача 1. (5 баллов)

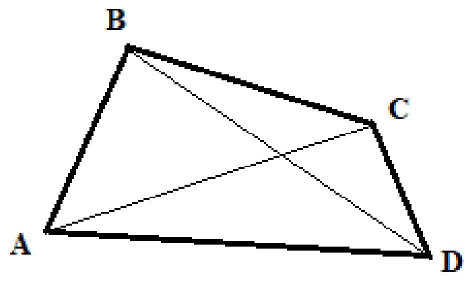
1.1 На поляне растут четыре дерева – дуб, клен, береза и осина, так, что, прислонившись хотя бы с одной стороны спиной к каждому из деревьев, человек может видеть другие три дерева. Саша бежит от осины к березе, от березы к дубу. Паша бежит от осины к клену, от клена к дубу. Мальчики стартуют одновременно и бегут с одинаковой скоростью по кратчайшему пути. Саша оказался у дуба раньше Паши. Можно ли определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена?

Решение.

В условии спрятан выпуклый (т.к. угол зрения человека по горизонтали равен 180 градусов) четырехугольник с вершинами A (осина), B (береза), C (клен) и D (дуб), в котором $AB + BD < AC + CD$. Кратчайший путь подразумевает, что мальчики двигаются по отрезкам, соединяющим вершины (по сторонам или диагоналям) четырехугольника. Поскольку скорости мальчиков считаются равными, требуется сравнить длину отрезков AB и AC.

Возможны несколько вариантов порядка расположения вершин четырехугольника. Рассмотрим каждый из них.

1.)



Рассмотрим четырехугольник $ABCD$, в котором $AB + BD < AC + CD$.

Докажем, что $AB < AC$.

Пусть $AB \geq AC$.

Тогда $\angle BCA \geq \angle ABC$ по неравенству треугольника.

Далее, $\angle BCD > \angle BCA \geq \angle ABC > \angle DBC$, следовательно, $BD \geq CD$.

Сложим неравенства:

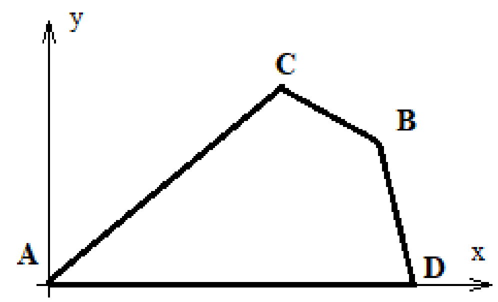
$$\begin{cases} BD > CD \\ AB \geq AC \end{cases}$$

Получаем, что $AB + BD > AC + CD$, т.е. противоречие, а значит: $AB < AC$ чтд.

2.) Для четырехугольника $ACBD$ возможен вариант $AB > AC$.

Составим соответствующий пример:

пусть $A(0;0)$, $D(10;0)$, $C(5;10)$, $B(8;8)$.

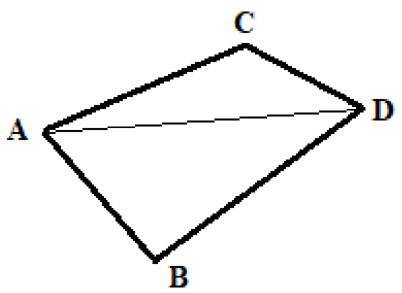


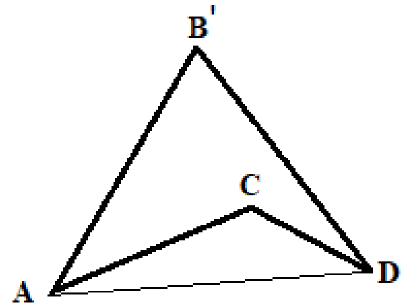
Тогда: $AC = CD = 5\sqrt{5}$, $AC + CD = 10\sqrt{5}$, $AB = 8\sqrt{2}$, $BD = 2\sqrt{17}$, $AB + BD = 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17}$ и $AB > AC$ т.к. $(8\sqrt{2})^2 = 128 > 125 = (5\sqrt{5})^2$, но $AC + CD = 10\sqrt{5} > 8\sqrt{2} + 2\sqrt{17} = AB + BD$.

По результатам п.1) и п.2) уже можно говорить, что однозначно установить, кто достиг «промежуточного» дерева раньше, невозможно, и в принципе, вместо доказательства п.1) можно предъявить подходящий пример, как и в п.2).

Однако, рассмотрим еще один вариант взаимного расположения точек A, B, C и D.

3.) Точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD.

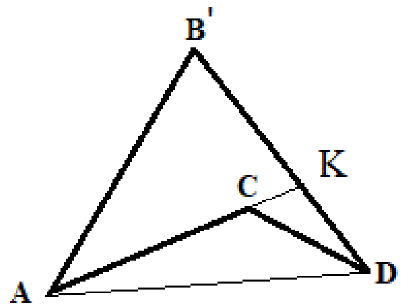




Пусть $AB \geq AC$, тогда отразим точку B симметрично относительно прямой AD: получим точку B', такую что C лежит внутри окружности с центром в A и радиусом AB, т.е. точка C внутри треугольника $AB'D$.

Докажем, что $AB' + B'D = AB + BD > AC + CD$, что противоречит условию задачи.

Продлим AC до пересечения с $B'D$ в точке K.



Тогда по неравенству треугольника:
в $\Delta AB'K$ имеем: $AK < AB' + B'K$;
в ΔCKD имеем: $CD < CK + KD$.
Сложим эти неравенства:

$$AK + CD < AB' + B'K + CK + KD,$$

$(AC + CK) + CD < AB' + (B'K + KD) + CK$.
Сократим на CK и получим:
$AC + CD < AB' + B'D$.
Следовательно, в рассмотренной конфигурации $AB < AC$.

Ответ: невозможно определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена.

1.2 На поляне растут четыре дерева – дуб, клен, береза и осина, так, что, прислонившись хотя бы с одной стороны спиной к каждому из деревьев кроме дуба, человек может видеть другие три дерева. Саша бежит от осины к березе, от березы к дубу. Паша бежит от осины к клену, от клена к дубу. Мальчики стартуют одновременно и бегут с одинаковой скоростью по кратчайшему пути. Саша оказался у дуба раньше Паши. Можно ли определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена?

Решение.
В условии спрятан невыпуклый четырехугольник с вершинами A (осина), B (береза), C (клен) и D (дуб), в котором $AB + BD < AC + CD$, причем точка D лежит внутри треугольника ABC. Кратчайший путь подразумевает, что мальчики двигаются по отрез-

кам, соединяющим вершины (по сторонам или диагоналям) четырехугольника. Поскольку скорости мальчиков считаются равными, требуется сравнить длину отрезков AB и AC. Как и в задаче 1.1 возможны несколько вариантов расположения точек, но для краткости (в отличие от приведенного выше решения задачи 1.1) ограничимся двумя примерами, иллюстрирующими противоположные результаты.

1.) Пусть $A(0;0), B(8;8), D(4;0), C(5;-10)$. Тогда $AC = 5\sqrt{5}, CD = \sqrt{101}, AB = 8\sqrt{2}, BD = 4\sqrt{5}$. Здесь $AC + CD > AB + BD$ и $AB > AC$.
2.) Пусть $A(0;0), B(8;8), D(4;0), C(5;-11)$. Тогда $AC = \sqrt{146}, CD = \sqrt{122}, AB = 8\sqrt{2}, BD = 4\sqrt{5}$. Здесь $AC + CD > AB + BD$ и $AC > AB$.

Ответ: невозможно определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена.

1.3 На поляне растут четыре дерева – дуб, клен, береза и осина, так, что, прислонившись хотя бы с одной стороны спиной к каждому из деревьев кроме осины, человек может видеть другие три дерева. Саша бежит от осины к березе, от березы к дубу. Паша бежит от осины к клену, от клена к дубу. Мальчики стартуют одновременно и бегут с одинаковой скоростью по кратчайшему пути. Саша оказался у дуба раньше Паши. Можно ли определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена?

Решение аналогично решению задачи 1.2 с точностью до перестановки точек A и D.

Ответ: невозможно определить, кто из мальчиков раньше достиг «промежуточного» дерева – Саша березы или Паша клена.

Задача 2. (5 баллов)

2.1. После аварии на атомной электростанции в Фукусиме 1 млн тонн воды, загрязненной тритием, складируют в специальных резервуарах. Концентрация трития в этой воде на уровне $4 \cdot 10^6$ Бк/кг (1 беккерель — один распад в секунду). Оцените отношение числа радиоактивных молекул воды в резервуаре к числу обычных, если период полураспада трития 12,3 года. Молярную массу воды принять равной 18 г/моль, а число Авогадро — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Решение. Переведем период полураспада трития в секунды. В среднем в году содержится $365{,}25$ дней, каждый из которых состоит из 24 часов. Учитывая, что в часе 3600 секунд, найдем, что в году всего

$$365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 3{,}16 \cdot 10^7 \text{ секунд.}$$

Поэтому период полураспада трития составляет

$$12{,}3 \cdot 3{,}16 \cdot 10^7 = 3{,}89 \cdot 10^8 \text{ секунд.}$$

Согласно условию, в настоящий момент в одном килограмме загрязненной воды происходит $4 \cdot 10^6$ распадов трития в секунду. При такой же скорости распада за время, равное периоду полураспада трития, в одном килограмме загрязненной воды произойдет всего

$$4 \cdot 10^6 \cdot 3{,}89 \cdot 10^8 = 1{,}56 \cdot 10^{15} \text{ распадов.}$$

По определению период полураспада — это время, за которое распадается половина имеющихся радиоактивных ядер. Соответственно в одном килограмме загрязненной воды на текущий момент имеется всего

$$\sim 2 \cdot 1{,}56 \cdot 10^{15} = 3{,}1 \cdot 10^{15} \text{ молекул воды с тритием.}$$

Как известно, масса одного литра воды составляет 1 кг, поэтому в литре содержится

$$\frac{1\text{ кг } \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}}{0{,}018 \text{ кг/моль}} = 3{,}3 \cdot 10^{25} \text{ молекул воды.}$$

Таким образом, в загрязненной воде обычных молекул больше примерно в $1{,}1 \cdot 10^{10}$ раз, чем молекул воды с радиоактивным тритием (обычные молекулы воды — это H_2O, молекулы с тритием — это T_2O, где T — химический символ трития).

Заметим, что атомная масса трития равна 3, поэтому молярная масса T_2O равна 0,022 кг/моль. Однако, учитывая, что на одну молекулу T_2O приходится 10^{10} молекул H_2O, молярная масса которой 0,018 кг/моль, увеличение средней молярной массы загрязненной воды по сравнению с 0,018 кг/моль крайне мало. Гораздо больший вклад дает тяжелая вода с дейтерием D_2O (молярная масса 0,020 кг/моль), природное содержание которого $\sim 1{,}2 \cdot 10^{-4}$, что гораздо больше, чем 10^{-10}. Кроме того, в природе также существуют в малом количестве стабильные тяжелые изотопы кислорода ^{17}O и ^{18}O. С учетом наличия тяжелых изотопов водорода и кислорода молярная масса природной воды оказывается равной 0,01801528 кг/моль.

Более существенное приближение, которое было сделано выше при решении задачи, состоит в следующем. Мы приняли, что скорость распада трития в загрязненной воде в течение всех 12,3 лет неизменна и находится на современном уровне $4 \cdot 10^6$ распадов трития в секунду в одном килограмме. Однако из-за того, что количество трития вследствие распада с течением времени уменьшается, то и количество его распадов в секунду должно уменьшаться, причем равномерно в каждом килограмме загрязненной воды. Это означает, что за 12,3 года произойдет не $1{,}56 \cdot 10^{15}$ распадов, а меньше. Поэтому найденное число молекул воды с тритием $3{,}1 \cdot 10^{15}$ — это лишь оценка сверху истинного числа таких молекул.

Точное решение рассматриваемой задачи можно получить с помощью закона радиоактивного распада. Этот закон говорит о том, что число распадов dN, происходящих в течение малого промежутка времени dt в некоторой массе вещества, содержащем радиоактивные атомные ядра, пропорционально dt и общему числу радиоактивных ядер N (при этом подразумевается, что это число весьма велико). Можно записать закон радиоактивного распада в следующем виде:

$$dN = -\lambda N dt,$$

где λ — так называемая постоянная распада, а знак «минус» в правой части равенства показывает, что общее число радиоактивных ядер с течением времени уменьшается.

Эта формула, описывающая закон радиоактивного распада, представляет собой дифференциальное уравнение, решение которого дает закон изменения числа ядер N с течением времени t:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad (*)$$

где N_0 — число ядер в начальный момент времени $t = 0$, а число

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

— известная математическая константа (основание натуральных логарифмов). При этом говорят, что N убывает по экспоненциальному закону (или экспоненциально).

Скорость радиоактивного распада I, то есть число распадов в единицу времени, также убывает экспоненциально с течением времени

$$I(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = I_0 e^{-\lambda t}$$

(здесь $I_0 = \lambda N_0$ — скорость распада в начальный момент времени $t = 0$). Величина I_0 для одного килограмма загрязненной воды нам дана в условии: $4 \cdot 10^6$ распадов в секунду. Таким образом, чтобы найти искомую величину N_0, достаточно определить постоянную распада λ — это можно сделать, зная период полураспада трития $t_{1/2}$. За время $t_{1/2}$ от начального числа ядер N_0 останется половина. Поэтому на основании формулы (*) можно записать

$$N(t_{1/2}) = N_0/2 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{3{,}89 \cdot 10^8} = 1{,}78 \cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-1}.$$

Тогда

$$N_0 = \frac{I_0}{\lambda} = \frac{4 \cdot 10^6\ \text{с}^{-1}}{1{,}78 \cdot 10^{-9}\ \text{с}^{-1}} \approx 2{,}2 \cdot 10^{15}$$

— столько молекул воды с тритием содержится в одном килограмме загрязненной воды в настоящее время. Как видим, полученная выше оценка содержания молекул воды с тритием оказалась завышенной в 1,4 раза.

Ответ: обычных молекул больше в $1{,}1 \cdot 10^{10}$ раз.

2.2. После аварии на атомной электростанции в Фукусиме 1 млн тонн воды, загрязненной тритием, складируют в специальных резервуарах. Концентрация трития в этой воде на уровне $4 \cdot 10^6$ Бк/кг (1 беккерель — один распад в секунду). Оцените период полураспада трития, если известно, что отношение числа молекул воды с тритием, содержащихся в резервуаре, к числу обычных молекул воды составляет $1 : 10^{10}$. Молярную массу воды принять равной 18 г/моль, а число Авогадро — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: ~ 13 лет (из приближенного решения, не учитывающего уменьшения скорости распада с течением времени).

2.3. После аварии на атомной электростанции в Фукусиме 1 млн тонн воды, загрязненной тритием, складируют в специальных резервуарах. Известно, что отношение числа молекул воды с тритием, содержащихся в резервуаре, к числу обычных молекул воды составляет $1:10^{10}$. Оцените концентрацию трития в загрязненной воде в единицах Бк/кг (1 беккерель — один распад в секунду), если период полураспада трития 12,3 года. Молярную массу воды принять равной 18 г/моль, а число Авогадро — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $4{,}2 \cdot 10^{6}$ Бк/кг (из приближенного решения, не учитывающего уменьшения скорости распада с течением времени).

Задача 3. (5 баллов)

3.1. В химической технологии существует модель реактора идеального вытеснения. Это реактор, в котором частицы движутся упорядоченно в одном направлении и с одинаковой скоростью, не перемешиваясь с другими частицами. Для такого реактора установлена следующая зависимость времени пребывания в реакторе от степени превращения вещества для реакций первого порядка:

$$t = \frac{1}{k} * \ln(\frac{1}{1-x})$$

где t - время пребывания в реакторе, k – константа скорости реакции, x – степень превращения (в долях).

Определите, какая степень превращения будет достигнута на выходе реактора, представляющего собой цилиндр, радиусом 5 сантиметров и длиной 1 метр для реакции первого порядка разложения ацетальдегида на метан и угарный газ, если константа скорости этой реакции составляет 0.33 с$^{-1}$, а объемная скорость подачи реагента в реактор составляет 10 л/с.

Решение:

Объем реактора равен

$$V = \pi\, R^2 H = \pi \cdot 5^2 \cdot 100 = 7853{,}98 \text{ см}^3 = 7{,}854 \text{ л}.$$

Чтобы найти время пребывания каждой частицы, нужно объем реактора поделить на скорость подачи реагента:

$$t = \frac{7{,}854}{10} = 0{,}7854 \text{ с}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{1-x} = \mathrm{e}^{kt} = \mathrm{e}^{0{,}33 \cdot 0{,}7854} = 1{,}2959,$$

то искомая степень превращения

$$x = 0{,}2283$$

или примерно 23%.

Ответ: ≈23%.

3.2. В химической технологии существует модель реактора идеального вытеснения. Это реактор, в котором частицы движутся упорядоченно в одном направлении и с одинаковой скоростью, не перемешиваясь с другими частицами. Для такого реактора установлена следующая зависимость времени пребывания в реакторе от степени превращения вещества для реакций первого порядка:

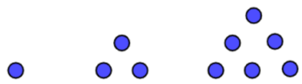
$$t = \frac{1}{k} * \ln(\frac{1}{1-x})$$

где t - время пребывания в реакторе, k – константа скорости реакции, x – степень превращения (в долях).
Определите, какая степень превращения будет достигнута на выходе реактора, представляющего собой цилиндр, радиусом 9 сантиметров и длиной 2 метра для реакции первого порядка разложения ацетальдегида на метан и угарный газ, если константа скорости этой реакции составляет 0.5 с$^{-1}$, а объемная скорость подачи реагента в реактор составляет 7 л/с.

Ответ: ≈97%

Задача 4. (5 баллов)

4.1. Треугольное число T_n - число точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника со стороной n точек. Например, $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6$ (см. рисунок).



А) Напишите программу, которая вычисляет и хранит значения всех треугольных чисел для n от 1 до 2021 включительно.
Б) Сформулируйте гипотезу, как связаны значения чисел T_{i+j}, T_i, T_j, i, j.
В) Напишите программу, которая проверяет гипотезу для $T_{i+j} = T_{2021}$ и всех возможных значений i, j.
Г) Докажите гипотезу.

Решение:
А) Заметим, что каждый последующий треугольник получается добавлением одной линии точек. Число точек в добавляемой линии равно номеру соответствующего треугольного числа, то есть $T_n = T_{n-1} + n$.
Пример программы на Pascal:

```
program Dots;
var
   T: array[1..2021] of longint;
   i: integer;

begin
  T[1]:=1;
  for i:=2 to 2021 do
    T[i]:=T[i-1]+i;
end.
```

Обратим внимание, что значения треугольных чисел быстро растут, например, $T_{2021} = 2043231$, и для работы с такими числами нельзя использовать тип integer.

Б) Используя программу из пункта А) выведем на экран значения нескольких первых треугольных чисел и сформулируем гипотезу, как связаны значения чисел T_{i+j}, T_i, T_j, i, j.

$$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15, T_6 = 21, \dots$$
$$T_3 = T_{1+2} = T_1 + T_2 + 2,$$
$$T_4 = T_{1+3} = T_1 + T_3 + 3,$$
$$T_5 = T_{1+4} = T_1 + T_4 + 4,$$

$$T_6 = T_{1+5} = T_1 + T_5 + 5,$$
$$T_4 = T_{2+2} = T_2 + T_2 + 4,$$
$$T_5 = T_{2+3} = T_2 + T_3 + 6,$$
$$T_6 = T_{2+4} = T_2 + T_4 + 8,$$
$$T_6 = T_{3+3} = T_3 + T_3 + 9.$$

Гипотеза: $T_{i+j} = T_i + T_j + i \cdot j$.

В) С помощью программы проверим нашу гипотезу для $T_{i+j} = T_{2021}$.

```
program Dots;
var
    T: array[1..2021] of longint;
    i: integer;
    b: boolean;

begin
  T[1]:=1;
  for i:=2 to 2021 do
    T[i]:=T[i-1]+i;
  b:=true;
  i:=1;
  while (b and (i<2011)) do
  begin
    if (T[i]+T[2021-i]+i*(2021-i) <> T[2021]) then
      b:=false;
    i:=i+1;
  end;
  if b then
    writeln('Гипотеза верна')
    else
    writeln('Гипотеза неверна');
end.
```

В результате работы программы мы получили сообщение «Гипотеза верна».

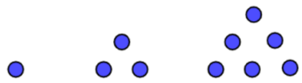
Заметим, что проверку гипотезы следует прекращать при появлении первого ложного результата и в силу коммутативности сложения и умножения проверку гипотезы достаточно провести для $i = 1, \dots, 1010$.

Г) Докажем гипотезу, сформулированную в п.Б), используя следующее наблюдение, по сути, сформулированное в п. А): значение треугольного числа T_n равно сумме S_n первых n членов арифметической прогрессии, где $a_1 = 1$ и разность $d = 1$. Следовательно, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$T_{i+j} = \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1) = \frac{1}{2}i(i+1) + \frac{1}{2}j(j+1) + ij = T_i + T_j + ij.$$

Ответ: Б) $T_{i+j} = T_i + T_j + i \cdot j$.

4.2. Треугольное число T_n - число точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника со стороной n точек. Например, $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6$ (см. рисунок).



А) Напишите программу, которая вычисляет и хранит значения всех треугольных чисел для n от 1 до 2000 включительно.
Б) Сформулируйте гипотезу, как связаны значения чисел $T_{i\cdot j}$, T_i, T_j, T_{i-1}, T_{j-1}.
В) Напишите программу, которая проверяет гипотезу для $T_{i\cdot j} = T_{2000}$ и всех возможных значений i, j.
Г) Докажите гипотезу.

Решение для п. Б) и Г):
Б)

$$T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15, T_6 = 21, T_9 = 45, T_{10} = 55, T_{12} = 78, T_{20} = 210,$$

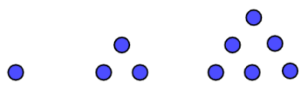
$$T_4 = T_{2\cdot 2} = T_2 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_1,$$
$$T_6 = T_{2\cdot 3} = T_2 \cdot T_3 + T_1 \cdot T_2,$$
$$T_{12} = T_{3\cdot 4} = T_3 \cdot T_4 + T_2 \cdot T_3,$$
$$T_{12} = T_{2\cdot 6} = T_2 \cdot T_6 + T_1 \cdot T_5,$$
$$T_{20} = T_{4\cdot 5} = T_4 \cdot T_5 + T_3 \cdot T_4,$$
$$T_{20} = T_{2\cdot 10} = T_2 \cdot T_{10} + T_1 \cdot T_9.$$

Гипотеза: $T_{ij} = T_i \cdot T_j + T_{i-1} \cdot T_{j-1}$.
Г)

$$T_i \cdot T_j + T_{i-1} \cdot T_{j-1} = \frac{1}{2} i(i+1) \cdot \frac{1}{2} j(j+1) + \frac{1}{2}(i-1)i \cdot \frac{1}{2}(j-1)j =$$
$$= \frac{1}{4} ij\big((i+1)(j+1) + (i-1)(j-1)\big) = \frac{1}{2} ij(ij+1) = T_{i\cdot j}.$$

Ответ: $T_{i\cdot j} = T_i \cdot T_j + T_{i-1} \cdot T_{j-1}$.

4.3. Треугольное число T_n - число точек, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника со стороной n точек. Например, $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6$ (см. рисунок).



А) Напишите программу, которая вычисляет и хранит значения всех треугольных чисел для n от 1 до 2022 включительно.
Б) Сформулируйте гипотезу, как связаны значения чисел T_{2i}, T_i, T_{i-1}.
В) Напишите программу, которая проверяет гипотезу для всех возможных значений T_{2i}, $i = 1, \dots, 1011$, вычисленных в пункте А).
Г) Докажите гипотезу.

Ответ: Б) $T_{2i} = 3T_i + T_{i-1}$.
Г) $3T_i + T_{i-1} = \frac{3}{2} i(i+1) + \frac{1}{2}(i-1)i = \frac{1}{2} i(3i + 3 + i - 1) = \frac{1}{2}(2i)(2i+1) = T_{2i}$.