ШКОЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ СПбГУ 2021

комплекс предметов «Инженерные системы»
(математика, информатика, физика, химия),
2020/21 учебный год.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

Условия задач
(решения / ответы)

8–9 класс

Задача 1. (5 баллов)

Для получения волшебного зелья по традиционному рецепту необходимо смешать в определенных пропорциях мертвую воду и экстракт бузины. В большом чане эти ингредиенты налиты в неизвестных количествах. Кощей Бессмертный на вкус определил, что экстракта бузины в чане больше, чем требуется по рецепту. Предположим, что у него есть возможность подливать ингредиенты в чан только одновременно и в равных количествах.
1. При каких условиях Кощей может уменьшить долю экстракта бузины в чане?
2. В каких пределах он может уменьшать долю экстракта бузины?

Решение. Обозначим первоначальные объемы мертвой воды и экстракта бузины соответственно a и b ($a \geq 0,\ b \geq 0$, a и b не равны нулю одновременно). Тогда в начале доля экстракта бузины в зелье была равна

$$\frac{b}{a+b}.$$

После того, как Кощей Бессмертный добавит в зелье одинаковый объем $c > 0$ каждого из компонентов, доля экстракта бузины станет

$$\frac{b+c}{a+b+2c}.$$

Посмотрим, какой получается знак разности между начальной и конечной долями экстракта бузины:

$$\frac{b+c}{a+b+2c} - \frac{b}{a+b} = \frac{(a-b)c}{(a+b+2c)(a+b)}.$$

Это означает, что если в исходном варианте зелья мертвой воды было больше, чем экстракта бузины ($a > b$), то уменьшить долю экстракта бузины в зелье Кощей никак не сможет. Таким образом, $a < b$ — это необходимое условие, которое обеспечивает возможность уменьшения доли экстракта бузины способом, доступным Кощею по условию задачи.

Определим, в каких пределах Кощей сможет уменьшить долю экстракта бузины в зелье. Пусть доля экстракта бузины уменьшается в k раз ($k > 1$). Это означает, что

$$\frac{b+c}{a+b+2c} = \frac{1}{k} \cdot \frac{b}{a+b}.$$

Отсюда

$$k(a+b)(b+c) = b(a+b+2c) \;\; =>$$

$$c = \frac{b(a+b)(k-1)}{2b - k(a+b)},$$

причем эта величина должна быть положительной.

Учитывая, что числитель здесь всегда больше нуля, получаем следующие пределы изменения величины k:

$$1 < k < \frac{2b}{a+b} \leq 2$$

(значение 2 справа получилось бы в том случае, если бы в начале мертвой воды в зелье вообще не оказалось; однако для k это значение недостижимо, т.к. в этом случае c обращается в бесконечность).

Ответ:

1. Экстракта бузины в исходном зелье должно быть больше, чем мертвой воды.
2. Не более чем в 2 раза, причем ровно в 2 раза нельзя.

Задача 2. (5 баллов)

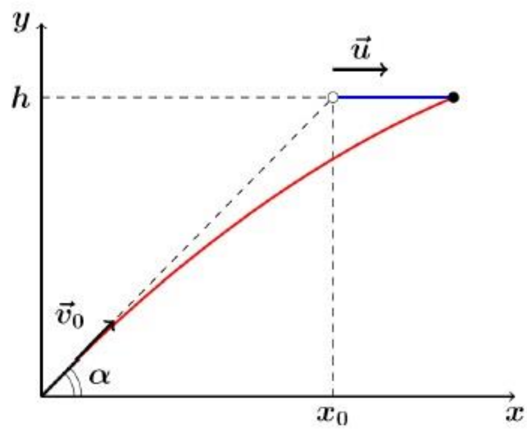
Хулиган Вася хочет попасть камнем из рогатки в воробья, который летит горизонтально на высоте 30 м с постоянной скоростью. Известно, что если камень подлетает к воробью снизу, то он сможет увернуться в последний момент, а если сверху — то нет. Когда направление от рогатки в сторону воробья составляет с горизонтом 45^0, Вася запускает камень под тем же углом. С какой скоростью должен лететь воробей, чтобы иметь возможность увернуться от камня вне зависимости от скорости вылета камня? Предполагается, что траектории воробья и камня лежат в одной вертикальной плоскости. Размерами воробья и камня, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. С течением времени t координаты воробья меняются следующим образом:

$$x_s = x_0 + ut,$$
$$y_s = h,$$

где u – постоянная скорость воробья. При этом $x_0 = h \operatorname{ctg} \alpha$. Координаты камня изменяются как

$$x_r = (v_0 \cos \alpha)t,$$
$$y_r = (v_0 \sin \alpha)t - gt^2/2,$$



где v_0 – начальная скорость камня, g – ускорение свободного падения.

В момент времени t_m, когда камень достигнет наибольшей высоты (вершины своей параболической траектории), вертикальная компонента его скорости станет равной нулю:

$$v_0 \sin\alpha - g t_m = 0 \quad => $$
$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Для того, чтобы камень подлетел к воробью снизу, и воробей смог бы увернуться, время столкновения t_c должно было меньше t_m – ведь после подъема на максимальную высоту камень далее падает вниз.

Найдем t_c, используя условие, что в момент столкновения координаты воробья и камня равны:

$$x_0 + u t_c = (v_0 \cos\alpha) t_c,$$
$$h = (v_0 \sin\alpha) t_c - \frac{g t_c^2}{2}.$$

Из первого уравнения выразим скорость v_0 и подставим во второе:

$$v_0 = \frac{x_0 + u t_c}{t_c \cos\alpha}, \qquad (*)$$

$$h = \left(\frac{x_0 + u t_c}{t_c \cos\alpha} \cdot \sin\alpha\right) t_c - \frac{g t_c^2}{2} = x_0 \operatorname{tg}\alpha + u t_c \operatorname{tg}\alpha - \frac{g t_c^2}{2}.$$

Вспоминая, что $x_0 = h \operatorname{ctg}\alpha$, получаем уравнение для определения t_c:

$$\frac{g t_c^2}{2} - u t_c \operatorname{tg}\alpha = 0 \quad => \quad t_c = \frac{2u \operatorname{tg}\alpha}{g}.$$

Благоприятный для воробья исход стрельбы будет, если $t_c < t_m$ (ситуация, представленная на рисунке – см. выше):

$$\frac{2u \operatorname{tg}\alpha}{g} < \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad => \qquad u < \frac{v_0 \cos\alpha}{2}.$$

Выразим v_0 из полученного ранее выражения $(*)$:

$$v_0 = \frac{x_0 + u \cdot (2u \operatorname{tg}\alpha)/g}{(2u \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha)/g} = \frac{gh \operatorname{ctg}\alpha + 2u^2 \operatorname{tg}\alpha}{2u \sin\alpha}.$$

Тогда:

$$u < \frac{gh \operatorname{ctg}^2\alpha + 2u^2}{4u} \quad => \quad u < \sqrt{\frac{gh \operatorname{ctg}^2\alpha}{2}}.$$

Подставляя числовые данные из условия, а также значение ускорения свободного падения:

$$h = 30 \text{ м}, \ \alpha = 45°, \ g = 9{,}81 \text{ м/с}^2,$$

получим следующую оценку: $u < 12{,}1$ м/с – при такой скорости воробья, камень всегда будет подлетать к нему снизу, независимо от своей начальной скорости.

Ответ: если скорость воробья <12,1 м/с, то камень подлетает к нему снизу, независимо от своей начальной скорости.

Задача 3. (5 баллов)

Пусть даны две обыкновенные дроби:

$$\frac{n}{n+2021} \quad \text{и} \quad \frac{n+2021}{n},$$

где n – натуральное число.

1. Верно ли утверждение, что первая из этих дробей всегда ближе к 1, чем вторая?
2. Для каждой из дробей определите аналитически те значения n, при которых дробь наиболее близка к 1, если $1000 \le n \le 2021$.
3. Составьте компьютерную программу (или алгоритм), с помощью которой без предварительных рассуждений можно найти наиболее близкое к 1 значение какой-нибудь одной из дробей, если $1000 \le n \le 3000$.

Решение. Найдем абсолютную величину отличия каждой из дробей от 1 и сравним получившиеся выражения между собой.

$$\left|\frac{n}{n+2021} - 1\right| = \frac{2021}{n+2021},$$

$$\left|\frac{n+2021}{n} - 1\right| = \frac{2021}{n}.$$

Ясно, что для обеих дробей величина их отклонения от 1 тем меньше, чем больше n.

Значит, наименьшее отклонение для каждой из дробей будет достигнуто при $n = 2021$. Для первой дроби наименьшее отклонение равно 0,5, а для второй это отклонение равно 1.

Также очевидно, что утверждение, о котором спрашивалось в условии задачи, верное, поскольку

$$\left|\frac{n}{n+2021} - 1\right| = \frac{2021}{n+2021} < \frac{2021}{n} = \left|\frac{n+2021}{n} - 1\right|.$$

Пример программы для поиска наиболее близкого к 1 значения первой дроби:

```
program example;
var
n,i: integer;
m: real;
begin
    n:=1000;
    m:=abs(n/(n+2021)-1);
    for i:=1001 to 3000 do
        if abs(i/(i+2021)-1)<m then
            begin
            m:=abs(i/(i+2021)-1);
            n:=i;
            end;
    writeln(n,' ', m)
end.
```

Ответ:
1. Да, утверждение верное.
2. $n = 2021$ для обеих дробей.

Задача 4. (5 баллов)

Вес стандартного бронебойного снаряда равен 8 кг. Для выстрела используется заряд черного пороха массой 9,6 кг. Состав черного пороха в процентах по массе:

KNO_3: 74,81 %; S: 11,85 %; C: 13,33 %.

1. Дополните и уравняйте уравнение реакции сгорания черного пороха:

$$KNO_3 + S + C = K_2S + ? + ?$$

2. Вычислите, на каком максимальном расстоянии данный снаряд способен пробить стальную броню танка, если известно, что:
   а) для пробития брони скорость снаряда должна быть не менее 1645 м/с;
   б) потеря скорости при полете снаряда равна 55 м/с на 1 км полета;
   в) КПД преобразования тепловой энергии сгорания пороха в кинетическую энергию снаряда равен 60 %.

Полет снаряда считать прямолинейным.

Энтальпии образования сложных веществ:

$\Delta H^0(KNO_3)$= - 494,5 кДж/моль;
ΔH^0 (K_2S) = - 387,0 кДж/моль;
ΔH^0 (CO_2) = -393,5 кДж/моль.

Энтальпии образования простых веществ равны нулю.

Решение. Уравнение сгорания черного пороха имеет следующий вид:

$$2\ KNO_3 + 3\ C + S = K_2S + N_2 + 3\ CO_2$$

Энтальпия реакции:

$$\Delta H = 3 \times \Delta H^0\ (CO_2) + \Delta H^0\ (K_2S) - 2 \times \Delta H^0\ (KNO_3) =$$
$$= 3 \times (-393{,}5) + (-387{,}0) - 2 \times (-494{,}5) = -578{,}5 \text{ кДж}.$$

Молярная масса черного пороха по уравнению:

$$m\ (2\ KNO_3 + 3\ C + S) = 2 \times M\ (KNO_3) + 3 \times M\ (C) + M\ (S) =$$
$$=2 \times (39 + 14 + 16 \times 3) + 3 \times 12 + 32 = 2 \times 101 + 36 + 32 = 270 \text{ г}.$$

Тогда удельная теплота сгорания черного пороха на единицу массы получается равной

$$\Delta H/m = (-578{,}5 \div 270) = -2{,}14 \text{ кДж/г}.$$

Теплота, выделившаяся при сгорании метательного порохового заряда,

$$Q = m\ (\text{пороха}) \times \Delta H/m = 9600 \times 2{,}14 = 20544 \text{ кДж}.$$

С учетом КПД преобразования тепловой энергии сгорания пороха кинетическая энергия снаряда

$$E_к\ (\text{снаряда}) = Q \times \text{КПД} = 20544 \times 0{,}60 = 12326{,}4 \text{ кДж}.$$

С другой стороны,

$$E_к = \frac{mu^2}{2},$$

где u – скорость снаряда. Тогда

$$u = \sqrt{\frac{2E_к}{m}}.$$

Начальная скорость снаряда

$$u_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 12326{,}4 \cdot 10^3}{8}} = 1755 \text{ м/с}.$$

Значит, скорость снаряда уменьшится до 1645 м/с через

$$\frac{1755 - 1645}{55} = 2 \text{ км}.$$

Ответ:

1. $2\ KNO_3 + 3\ C + S = K_2S + N_2 + 3\ CO_2$
2. 2 км.